ESSEC option Eco 2003
Maths III

Exercice 1 Suites récurrentes et algèbre linéaire

Soit a un nombre réel. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$, et F le sous- ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+3} = 3a\,u_{n+1} + (1-3a)\ u_n$.
L'objet de ce problème est l'étude de l'ensemble F .

I. Étude du cas particulier $a = 1$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par ses trois premiers termes $u_0,\ u_1, u_2$, et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+3} = 3\,u_{n+1} - 2\,u_n.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et on note M la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. Reconnaître, pour tout entier naturel n , le produit $M\,X_n$.
En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.

2. **a**) Déterminer les valeurs propres de la matrice M et leur sous-espace propre associé.
b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M , c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ telle que la matrice T de f dans $\mathcal{B}'$ vérifie $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que les vecteurs e_1', e_2', e_3' aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.
b) Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de T^n

4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}$ ' . Exprimer M en fonction de T , P et P^{-1}, puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

5. **a**) Calculer P^{-1}(les calculs devront figurer sur la copie)
b) Pour tout entier naturel n, calculer les coefficients de la première ligne de M^n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de l'entier naturel n.

II . Étude du cas général .

On revient au cas général où a est un réel quelconque.

1. **Structure de F .**

a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
b) On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_n & \to & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$.
Démontrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels ; en déduire que F est de dimension finie et préciser sa dimension.

c) Justifier que des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F forment une base de F si, et seulement si, la matrice $\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ est inversible.

d) On suppose dans cette question: $a = 0$.
On note $s,\ s', s''$ les suites définies par :

$$s = \varphi^{-1}\left((1,0,0)\right),\ s' = \varphi^{-1}\left((0,1,0)\right),\ s'' = \varphi^{-1}\left((0,0,1)\right)$$

Déterminer $s,\ s', s''$ (on donnera les dix premiers termes de chacune de ces trois suites); en déduire la forme générale d'un élément de F .

e) Reprendre la question précédente dans le cas $a = 1/3$

2. Suites géométriques de F .

a) Démontrer que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F si, et seulement si, le réel r est racine de la fonction polynomiale $p : x \longrightarrow x^3 - 3a\,x + 3a - 1$
(avec la convention : $0^0 = 1$)

b) Déterminer, en fonction du réel a , le nombre de racines de la fonction p ainsi que leur valeur.

3. Cas où p admet trois racines distinctes.

a) Démontrer que, lorsque la fonction p admet trois racines distinctes 1, r_1 et r_2, les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de l'espace vectoriel F

b) Dans le cas où $a = 7$, exprimer, en fonction de l'entier naturel n , le terme général u_n de la suite, appartenant à F , qui vérifie: $u_0 = 1,\ u_1 = 10,\ u_2 = -8$

4. Cas où p admet une racine double.

a) Soit r un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général nr^n. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+3} - 3a\,u_{n+1} - (1-3a)\,u_n = r^n\left(n\,p\,(r) + r\,p'\,(r)\right)$$

b) En déduire que, lorsque p admet une racine double r_0 et une racine simple r_1 la suite $(n\,{r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F , et démontrer que les suites $({r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n\,{r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F .

c) Dans le cas où $a = 1/4$, exprimer le terme général u_n d' un élément quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F en fonction de u_0, u_1 et u_2 et de l'entier naturel n ; préciser la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2: probabilités et simulation informatique.

I. Exemple introductif.

On effectue des lancers successifs (indépendants) d'un dé cubique équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$, les variables aléatoires donnant le numéro amené par le dé aux premier lancer, deuxième lancer, ...

Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n, la somme des points obtenus aux n premiers lancers.

Enfin, pour tout entier naturel k non nul, la variable aléatoire T_k compte le nombre de celles des variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ qui prennent une valeur inférieure ou égale à k .

Par exemple, si les cinq premiers numéros amenés par le dé sont, dans l'ordre : 3, 1, 2, 3, 6, alors les événements suivants sont réalisés : $(Y_1 = 3)$, $(Y_2 = 4)$, $(Y_3 = 6)$, $(Y_4 = 9)$, $(Y_5 = 15)$, et les variables aléatoires T_2 , T_3 , T_9 et T_{12} prennent pour valeurs 0, 1, 4 et 4 .

1. On s'intéresse dans cette question à la variable aléatoire T_{12}.

a) Donner les valeurs prises par T_{12}
(On explicitera un exemple de résultat correspondant à chacune des deux valeurs extrêmes).
Quelle est la probabilité que T_{12} prenne la valeur 12 ?

b) Simulation informatique
Compléter les lignes marquées par les symboles ... du programme Pascal ci-dessous, de façon qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur de T_{12}.
On rappelle que `random(6)` fournit un entier aléatoire parmi 0, 1, 2, 3, 4, 5 .

```
Program ESSEC2003A;
var x,y,t:integer;
begin
     randomize;
     y:=0;t:=0;
     repeat
          x:=random(6)+1;
          y:=...;
          t:=...;
     until ...;
     writeln(T=',t);
end.
```

2. On s'intéresse dans cette question à la variable aléatoire T_2

a) Déterminer la loi de probabilité de T_2.

b) Qu'obtient-on à l'affichage en exécutant le programme ci-dessous ?

```
program Essec2003B;
var i,d1,d2:integer;
loi:array[0..2] of integer;
begin
     for i:=0 to 2 do loi[il:=0;
     for d1:=1 to 6 do for d2:=1 to 6 do
          if d1 > 2 then loi[0]:=loi[0]+1 else
               if d1+d2 > 2 then loi[1]:=Ioi[1]+1
                    else loi[2]:=Ioi[2]+1;
     for i:=0 to 2 do write(loi[i]/36);
end.
```

Dorénavant, on considère une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{T}; P)$, mutuellement indépendantes, de même loi, à valeurs positives ou nulles.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose alors : $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et on note F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n.

On fixe un réel strictement positif x , et on s'intéresse au nombre T_x des variables aléatoires Y_n telles que l'événement $(Y_n \leq x)$ soit réalisé.

II. Cas général.

1. Démontrer que la suite$(F_n(x))_{n\geq 1}$ est décroissante.

2. Démontrer chacune des deux relations suivantes :

- $P(T_x = 0) = 1 - F_1(x)$
- pour tout entier naturel n non nul, $P(T_x = n) = F_n(x) - F_{n+1}(x)$

3. En déduire l'équivalence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_x = n) = 1 \iff \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$$

Autrement dit, T_x est une variable aléatoire si, et seulement si : $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$

III. Cas d'une loi géométrique.

Dans cette troisième partie, les variables aléatoires X_i, $i \in \mathbb{N}^*$, suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre p , $(0 < p < 1)$, et on pose : $q = 1 - p$.
De plus, x est ici un entier naturel non nul fixé.
On rappelle que, par convention : $C_n^m = 0$ si n et m sont des entiers naturels tels que $m > n$.

1. Loi de Y_n, $n \in \mathbb{N}^*$

a) Préciser $Y_n(\Omega)$

b) Par un calcul de loi de somme, déterminer la loi de Y_2, puis celle de Y_3.

c) Démontrer que, pour tous entiers naturels m et n tels que $m \geq n$, on a l'égalité :

$$\sum_{k=n}^{m} C_k^n = C_{m+1}^{n+1}$$

d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$P(Y_n = k) = C_{k-1}^{n-1} q^{k-n} p^n$$

si k est un entier supérieur ou égal à n.

2. Calcul de $P(T_x = n)$.

a) Justifier que T_x est une variable aléatoire et préciser $T_x(\Omega)$.
Calculer $P(T_x = 0)$

b) Vérifier chacune des deux égalités :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= p^n \sum_{k=n}^{x} C_k^n q^{k-n} - qp^n \sum_{k=n+1}^{x} C_{k-1}^n q^{k-n-1} \\ F_{n+1}(x) &= p^{n+1} \sum_{k=n+1}^{x} C_{k-1}^n q^{k-n-1} \end{aligned}$$

En utilisant **II.2.** , en déduire le calcul de $P(T_x = n)$ pour n entier supérieur ou égal à 1.

c) Reconnaître la loi de T_x ; préciser son espérance et sa variance.

3. Sachant que les variables aléatoires X_1, $X_2\ldots$ sont des temps d'attente, et en observant que la réalisation de n premiers succès équivaut à la réalisation du $n^{i\text{è}me}$ succès, donner une interprétation , soigneusement exposée, de chacune des variables aléatoires Y_n et T_x, et retrouver ainsi la loi de T_x.

IV. Cas d'une loi exponentielle.

Dans cette dernière partie, les variables aléatoires X_n suivent la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.
On admettra qu'alors Y_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. À l'aide de **II.2.** , calculer $P(T_x = 0)$, puis $P(T_x = n)$ pour tout entier naturel n non nul.

2. Reconnaître la loi de T_x ; préciser son espérance et sa variance.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2003

ESSEC MATH III 2003 VOIE E

CORRIGE

EXERCICE–I : SUITES RECURRENTES ET ALGEBRE LINEAIRE

I. Etude du cas particulier $a = 1$

QUESTION–1)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ MX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2u_n + 3u_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } -2u_n + 3u_{n+1} = u_{n+3}, \text{ donc } MX_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Par une récurrence classique, certainement faite en cours, on établit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = M^n X_0 \text{ avec la convention } M^0 = I.}$$

QUESTION–2–a)

- **Recherche des valeurs propres**

λ **est valeur propre de** M **si et seulement si** $M - \lambda I$ **n'est pas inversible** ou encore si et seulement si **le système (S)** $(M - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **n'est pas de Cramer.** Le système **S** équivaut à : $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 3 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(S) \iff \begin{cases} -\lambda x + y & = 0 \\ -\lambda y + z & = 0 \\ -2x + 3y - \lambda z & = 0 \end{cases}$$

on effectue $L_1 \longleftrightarrow L_3$

$$\iff \begin{cases} -2x + 3y - \lambda z & = 0 \\ -\lambda y + z & = 0 \\ -\lambda x + y & = 0 \end{cases}$$

on effectue $L_3 \longleftarrow 2L_3 - \lambda L_1$

$$(S) \iff \begin{cases} -2x+3y-\lambda z &= 0 \\ -\lambda y + z &= 0 \\ (2-3\lambda)y+\lambda^2 z &= 0 \end{cases}$$

on effectue $L_3 \longleftarrow L_3 - \lambda^2 L_2$ et on permute y et z

$$\iff \begin{cases} -2x-\lambda z+3y &= 0 \\ z-\lambda y &= 0 \\ (\lambda^3-3\lambda+2)y &= 0 \end{cases}$$

Le dernier système est triangulaire supérieur, il n'est pas de Cramer si et seulement si l'un des termes diagonaux est nul, c'est-à-dire $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$. Cette équation admet une racine évidente $\lambda = 1$; on factorise par $(\lambda - 1)$ et l'on obtient $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0$. Le trinôme $\lambda^2 + \lambda - 2$ admet comme racines $\lambda = 1$ et $\lambda = -2$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathrm{spect}(M) = \{1; -2\}}$$

- **Recherche des sous-espaces propres notés $E(\lambda)$.**

∗ Pour $\lambda = -2$, $E(-2)$ est déterminé par :

$$(S) \quad : \begin{cases} -2x+2z+3y &= 0 \\ z+2y &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z &= -2y \\ x &= \frac{1}{2}(2z+3y) = \frac{1}{2}(-4y+3y) = -\frac{y}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(-2) &= \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = -\tfrac{y}{2},\ z = -2y\} \\ &= \{u = (-\tfrac{y}{2}, y, -2y) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u = -\tfrac{y}{2}(1,-2,4) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(-2) = \mathrm{vect}((-1,2,-4)) \ : \ \dim E(-2) = 1.}$$

∗ Pour $\lambda = 1$, $E(1)$ est déterminé par :

$$(S) \quad : \begin{cases} -2x-z+3y &= 0 \\ z-y &= 0 \end{cases}$$
$$\iff x = y = z$$

$$\begin{aligned} E(1) &= \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = z\} \\ &= \{u = (x,x,x) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(1) = \mathrm{vect}((1,1,1)) \ : \ \dim E(1) = 1.}$$

QUESTION–2–b)

On a $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\dim E(-2) + \dim E(1) = 2 \neq 3$:

$$\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

QUESTION–3–a)

Analyse de la situation : Si une telle base existe, d'après la matrice T, on doit avoir :

$f(e'_1) = -2e'_1$, donc comme $e'_1 \neq 0$ cela veut dire que e'_1 est un vecteur propre de f associé à la valeur -2.

$f(e'_2) = e'_2$ et $e'_2 \neq 0$ veut dire que e'_2 est un vecteur propre de f associé à la valeur 1

$f(e'_3) = e'_2 + e'_3 \iff (f - \mathrm{Id})(e'_3) = e'_2$ veut dire que e'_3 est un antécédent par l'endomorphisme $(f - \mathrm{Id})$ du vecteur e'_2.

Synthèse :

Prenons $e'_1 = (1,-2,4)$ d'après la question précédente, $e'_2 = (1,1,1)$ et cherchons $e'_3 = (x,y,z)$ / $(f-\mathrm{Id})(e'_3) = (1,1,1)$

Cette égalité équivaut à $(M-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où le système :

$$\begin{cases} -x+y & = 1 \\ \quad\ -y+z & = 1 \\ -2x+3y-z & = 1. \end{cases}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x & = y-1 \\ z & = y+1 \\ -2(y-1)+3y-(y+1) & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = y-1 \\ z & = y+1 \\ 1 & = 1 \end{cases}$$

Pour $x=0$ (qui est exigé par le texte), on obtient $y=1,\ z=2.$ $\boxed{e'_3 = (0,1,2)}$

Ces trois vecteurs satisfont aux égalités : $f(e'_1) = -2e'_1,\ f(e'_2) = e'_2$ et $f(e'_3) = e'_2 + e'_3$ puisque c'est ainsi qu'on les a trouvés : **reste à vérifier qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$.** La matrice P des coordonnées en colonnes de ces vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Effectuons $L_2 \longleftarrow 2L_2 - L_3$, on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Et effectuons $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$, cela donne $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Cette matrice est triangulaire inférieure et aucun de ses termes diagonaux n'est nul, elle est donc inversible ; donc P est inversible et les vecteurs (e'_1, e'_2, e'_3) forment une base de $\mathbb{R}^3$ d'après le cours

La matrice T de f dans cette base est donc bien $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

QUESTION–3–b)

Ecrivons $T = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$

$T = A + B$ et remarquons que : $AB = BA = B$ il faut (et il suffit de) faire le calcul. Cela implique que A et B commutent, **on peut appliquer le binôme de Newton** pour calculer T^n.

$*B^2 = (0)$ il faut (et il suffit de) faire le calcul.

$\forall k \geq 3,\ \exists\, p \in \mathbb{N}^* \ /\ k = 2+p$. Alors $B^k = B^{2+p} = B^2 \times B^p = (0) \times B^p = (0)$.

Ainsi $\forall k \geq 2,\ B^k = (0)$**.**

Alors $\forall n \geq 1,\ T^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k A^{n-k}$, soit $T^n = A^n + \binom{n}{1} BA^{n-1} = A^n + nBA^{n-1}$ puisque les autres termes sont nuls.

• Détermination de BA^{n-1} : on sait déjà (voir plus haut) que $BA = B$; donc $BA^2 = (BA)A = BA = B$.

Si pour un entier $k \geq 1$, $BA^k = B$, alors $BA^{k+1} = (BA^k)A = BA \times A$ par hypothèse de récurrence, donc $= BA$.

Nous venons de montrer par récurrence que : $\forall k \geq 1,\ BA^k = B$.

Cette formule est encore valable pour $k = 0$ avec la convention $A^0 = I$.

Alors $\forall n \geq 1,\ T^n = A^n + nBA^{n-1} = A^n + nB$. Cette formule est valable pour $n = 0$ avec la convention $T^0 = A^0 = I$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

QUESTION–4)

La matrice P est la matrice des coordonnées en colonnes de (e'_1, e'_2, e'_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. C'est celle que nous avons déjà appelée P dans la question 3.a)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On sait que $T = P^{-1}MP$ équivaut à $M = PTP^{-1}$. Un calcul hyper-classique donne $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PT^nP^{-1}$ avec la convention $M^0 = T^0 = I$.

QUESTION–5–a)

Il s'agit de calculer P^{-1}

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors $Y = PX \iff X = P^{-1}Y$. Nous allons résoudre le système équivalent à l'équation $Y = PX$ et présenter les solutions sous forme matricielle pour avoir P^{-1}

$$PX = Y \iff \begin{cases} x + y & = a \\ -2x + y + z & = b \\ 4x + y + 2z & = c \end{cases}$$

Effectuons $L_2 \longleftarrow L_3 - 2L_2$:

$$PX = Y \iff \begin{cases} x + y & = a \\ 8x - y & = c - 2b \\ 4x + y + 2z & = c \end{cases}$$

Effectuons $L_1 \longleftarrow L_1 + L_2$:

$$PX = Y \iff \begin{cases} 9x & = a - 2b + c \\ 8x - y & = c - 2b \\ 4x + y + 2z & = c \end{cases}$$

La résolution ne pose plus de problème car le système est triangularisé et l'on obtient :

$$\begin{cases} x & = \frac{1}{9}(a - 2b + c) \\ y & = \frac{1}{9}(8a + 2b - c) \\ z & = \frac{1}{9}(-6a + 3b + 3c) \end{cases}$$

Matriciellement cela donne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$$

QUESTION–5–b)

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} (-2)^n & 1 & n \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} (-2)^n + 8 - 6n & (-2)^{n+1} + 2 + 3n & (-2)^n - 1 + 3n \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'après la première question, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = M^n X_0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_n = \frac{1}{9}\Big(((-2)^n + 8 - 6n)u_0 + ((-2)^{n+1} + 2 + 3n)u_1 + ((-2)^n - 1 + 3n)u_2\Big).}$$

II. Etude du cas général

1. Structure de F

a)

F est inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; il est non vide car la suite nulle (ω_n) (définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ \omega_n = 0$) est dans F. De plus, si (u_n) et (v_n) sont deux suites de F et $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (s_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = \lambda u_n + v_n$ vérifie :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+3} &= \lambda u_{n+3} + v_{n+3} \\ &= \lambda(3a u_{n+1} + (1-3a)u_n) + 3a v_{n+1} + (1-3a)v_n \\ &= 3a(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + (1-3a)(\lambda u_n + v_n) \\ &= 3a s_{n+1} + (1-3a)s_n \end{aligned}$$

Donc la suite (s_n) est dans F

$$\boxed{\text{Conclusion : } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$$

b)

$\forall (u_n) \in F,\ \forall (v_n) \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda(u_n) + (v_n)) &= (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1, \lambda u_2 + v_2) \\ &= \lambda(u_0, u_1, u_2) + (v_0, v_1, v_2) \\ &= \lambda\varphi((u_n)) + \varphi((v_n)) \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire de } F \text{ dans } \mathbb{R}^3.}$$

- **Déterminons le noyau de φ.**

$(u_n) \in F$ est dans le noyau de φ si et seulement si $u_0 = u_1 = u_2 = 0$. **Par une récurrence forte,** on montre qu'alors (u_n) est la suite nulle :

en effet, soit Q_n la propriété " $\forall k \leq n,\ u_k = 0$ " .

Initialisation : $Q_0,\ Q_1$ et Q_2 sont satisfaites.