



# ESSEC option Eco 2003 Maths III

## Exercice 1 Suites récurrentes et algèbre linéaire

Soit  $a$  un nombre réel. On note  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites réelles définies sur  $\mathbb{N}$ , et  $F$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  formé des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui vérifient :  $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+3} = 3a u_{n+1} + (1 - 3a) u_n$ .

L'objet de ce problème est l'étude de l'ensemble  $F$ .

### I. Étude du cas particulier $a = 1$ .

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par ses trois premiers termes  $u_0, u_1, u_2$ , et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$  et on note  $M$  la matrice carrée  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. Reconnaître, pour tout entier naturel  $n$ , le produit  $M X_n$ .  
En déduire l'expression de  $X_n$  en fonction des matrices  $M, X_0$  et de l'entier naturel  $n$ .
2. a) Déterminer les valeurs propres de la matrice  $M$  et leur sous-espace propre associé.  
b) La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?
3. On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $M$ , c'est-à-dire tel que  $M$  soit la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$ .
  - a) Déterminer une base  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  telle que la matrice  $T$  de  $f$  dans  $\mathcal{B}'$  vérifie  $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , et que les vecteurs  $e'_1, e'_2, e'_3$  aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.
  - b) Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $T^n$
4. Soit  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ . Exprimer  $M$  en fonction de  $T, P$  et  $P^{-1}$ , puis  $M^n$  en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel  $n$ .
5. a) Calculer  $P^{-1}$  (les calculs devront figurer sur la copie)  
b) Pour tout entier naturel  $n$ , calculer les coefficients de la première ligne de  $M^n$ ; en déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $u_0, u_1, u_2$  et de l'entier naturel  $n$ .

### II . Étude du cas général .

On revient au cas général où  $a$  est un réel quelconque.

#### 1. Structure de $F$ .

- a) Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- b) On considère l'application  $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}^3$ .  
 $(u_n)_n \rightarrow (u_0, u_1, u_2)$

Démontrer que  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels ; en déduire que  $F$  est de dimension finie et préciser sa dimension.

- c) Justifier que des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $F$  forment une base de  $F$  si, et seulement si, la matrice  $\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}$  est inversible.
- d) On suppose dans cette question:  $a = 0$ .  
On note  $s, s', s''$  les suites définies par :

$$s = \varphi^{-1}((1, 0, 0)), \quad s' = \varphi^{-1}((0, 1, 0)), \quad s'' = \varphi^{-1}((0, 0, 1))$$

Déterminer  $s, s', s''$  (on donnera les dix premiers termes de chacune de ces trois suites); en déduire la forme générale d'un élément de  $F$ .

- e) Reprendre la question précédente dans le cas  $a = 1/3$

## 2. Suites géométriques de $F$ .

- a) Démontrer que la suite  $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à  $F$  si, et seulement si, le réel  $r$  est racine de la fonction polynomiale  $p : x \rightarrow x^3 - 3ax + 3a - 1$  (avec la convention :  $0^0 = 1$ )
- b) Déterminer, en fonction du réel  $a$ , le nombre de racines de la fonction  $p$  ainsi que leur valeur.

## 3. Cas où $p$ admet trois racines distinctes.

- a) Démontrer que, lorsque la fonction  $p$  admet trois racines distinctes  $1, r_1$  et  $r_2$ , les suites  $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  forment une base de l'espace vectoriel  $F$
- b) Dans le cas où  $a = 7$ , exprimer, en fonction de l'entier naturel  $n$ , le terme général  $u_n$  de la suite, appartenant à  $F$ , qui vérifie:  $u_0 = 1, u_1 = 10, u_2 = -8$

## 4. Cas où $p$ admet une racine double.

- a) Soit  $r$  un nombre réel et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de terme général  $nr^n$ . Démontrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ :

$$u_{n+3} - 3a u_{n+1} - (1 - 3a) u_n = r^n (n p(r) + r p'(r))$$

- b) En déduire que, lorsque  $p$  admet une racine double  $r_0$  et une racine simple  $r_1$  la suite  $(n r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à  $F$ , et démontrer que les suites  $(r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(n r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$  forment une base de  $F$ .
- c) Dans le cas où  $a = 1/4$ , exprimer le terme général  $u_n$  d'un élément quelconque  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $F$  en fonction de  $u_0, u_1$  et  $u_2$  et de l'entier naturel  $n$ ; préciser la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

# Exercice 2: probabilités et simulation informatique.

## I. Exemple introductif.

On effectue des lancers successifs (indépendants) d'un dé cubique équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ , les variables aléatoires donnant le numéro amené par le dé aux premiers lancers, deuxième lancer, ...

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $Y_n$ , la somme des points obtenus aux  $n$  premiers lancers. Enfin, pour tout entier naturel  $k$  non nul, la variable aléatoire  $T_k$  compte le nombre de celles des variables aléatoires  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$  qui prennent une valeur inférieure ou égale à  $k$ .

Par exemple, si les cinq premiers numéros amenés par le dé sont, dans l'ordre : 3, 1, 2, 3, 6, alors les événements suivants sont réalisés :  $(Y_1 = 3), (Y_2 = 4), (Y_3 = 6), (Y_4 = 9), (Y_5 = 15)$ , et les variables aléatoires  $T_2, T_3, T_9$  et  $T_{12}$  prennent respectivement pour valeurs 0, 1, 4 et 4.

1. On s'intéresse dans cette question à la variable aléatoire  $T_{12}$ .

- a) Donner les valeurs prises par  $T_{12}$   
(On explicitera un exemple de résultat correspondant à chacune des deux valeurs extrêmes).  
Quelle est la probabilité que  $T_{12}$  prenne la valeur 12 ?

b) Simulation informatique

Compléter les lignes marquées par les symboles . . . du programme Pascal ci-dessous, de façon qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur de  $T_{12}$ .

On rappelle que `random(6)` fournit un entier aléatoire parmi 0, 1, 2, 3, 4, 5 .

```
Program ESSEC2003A;
var x,y,t:integer;
begin
  randomize;
  y:=0;t:=0;
  repeat
    x:=random(6)+1;
    y:=...;
    t:=...;
  until ...;
  writeln(T=' ',t);
end.
```

2. On s'intéresse dans cette question à la variable aléatoire  $T_2$

- a) Déterminer la loi de probabilité de  $T_2$ .  
b) Qu'obtient-on à l'affichage en exécutant le programme ci-dessous ?

```
program Essec2003B;
var i,d1,d2:integer;
loi:array[0..2] of integer;
begin
  for i:=0 to 2 do loi[i]:=0;
  for d1:=1 to 6 do for d2:=1 to 6 do
    if d1 > 2 then loi[0]:=loi[0]+1 else
      if d1+d2 > 2 then loi[1]:=loi[1]+1
        else loi[2]:=loi[2]+1;
  for i:=0 to 2 do write(lois[i]/36);
end.
```

Dorénavant, on considère une suite  $(X_i)_{i \geq 1}$  de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega; \mathcal{T}; P)$ , mutuellement indépendantes, de même loi, à valeurs positives ou nulles.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose alors :  $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  et on note  $F_n$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Y_n$ .

On fixe un réel strictement positif  $x$ , et on s'intéresse au nombre  $T_x$  des variables aléatoires  $Y_n$  telles que l'événement  $(Y_n \leq x)$  soit réalisé.

## II. Cas général.

1. Démontrer que la suite  $(F_n(x))_{n \geq 1}$  est décroissante.

2. Démontrer chacune des deux relations suivantes :

- $P(T_x = 0) = 1 - F_1(x)$
- pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $P(T_x = n) = F_n(x) - F_{n+1}(x)$

3. En déduire l'équivalence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_x = n) = 1 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$$

Autrement dit,  $T_x$  est une variable aléatoire si, et seulement si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$

## III. Cas d'une loi géométrique.

Dans cette troisième partie, les variables aléatoires  $X_i$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , suivent la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$  de paramètre  $p$ , ( $0 < p < 1$ ), et on pose :  $q = 1 - p$ .

De plus,  $x$  est ici un entier naturel non nul fixé.

On rappelle que, par convention :  $C_n^m = 0$  si  $n$  et  $m$  sont des entiers naturels tels que  $m > n$ .

1. Loi de  $Y_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

- Préciser  $Y_n(\Omega)$
- Par un calcul de loi de somme, déterminer la loi de  $Y_2$ , puis celle de  $Y_3$ .
- Démontrer que, pour tous entiers naturels  $m$  et  $n$  tels que  $m \geq n$ , on a l'égalité :

$$\sum_{k=n}^m C_k^n = C_{m+1}^{n+1}$$

d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$P(Y_n = k) = C_{k-1}^{n-1} q^{k-n} p^n$$

si  $k$  est un entier supérieur ou égal à  $n$ .

2. Calcul de  $P(T_x = n)$ .

- Justifier que  $T_x$  est une variable aléatoire et préciser  $T_x(\Omega)$ .  
Calculer  $P(T_x = 0)$
- Vérifier chacune des deux égalités :

$$F_n(x) = p^n \sum_{k=n}^x C_k^n q^{k-n} - qp^n \sum_{k=n+1}^x C_{k-1}^n q^{k-n-1}$$
$$F_{n+1}(x) = p^{n+1} \sum_{k=n+1}^x C_{k-1}^n q^{k-n-1}$$

En utilisant **II.2.**, en déduire le calcul de  $P(T_x = n)$  pour  $n$  entier supérieur ou égal à 1.

c) Reconnaître la loi de  $T_x$  ; préciser son espérance et sa variance.

3. Sachant que les variables aléatoires  $X_1, X_2 \dots$  sont des temps d'attente, et en observant que la réalisation de  $n$  premiers succès équivaut à la réalisation du  $n^{\text{ième}}$  succès, donner une interprétation, soigneusement exposée, de chacune des variables aléatoires  $Y_n$  et  $T_x$ , et retrouver ainsi la loi de  $T_x$ .

#### IV. Cas d'une loi exponentielle.

Dans cette dernière partie, les variables aléatoires  $X_n$  suivent la loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  de paramètre  $\lambda > 0$ .

On admettra qu'alors  $Y_n$  admet pour densité la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. À l'aide de **II.2.**, calculer  $P(T_x = 0)$ , puis  $P(T_x = n)$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.
2. Reconnaître la loi de  $T_x$  ; préciser son espérance et sa variance.



## ANNALES DE MATHÉMATIQUES 2003

## ESSEC MATH III 2003 VOIE E

## CORRIGE

## EXERCICE-I : SUITES RECURRENTES ET ALGÈBRE LINÉAIRE

I. Etude du cas particulier  $a = 1$ 

## QUESTION-1)

$$\forall n \in \mathbb{N}, MX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2u_n + 3u_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } -2u_n + 3u_{n+1} = u_{n+3}, \text{ donc } MX_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Par une récurrence classique, certainement faite en cours, on établit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0 \text{ avec la convention } M^0 = I.$$

## QUESTION-2-a)

• Recherche des valeurs propres

$\lambda$  est valeur propre de  $M$  si et seulement si  $M - \lambda I$  n'est pas inversible ou encore si et seulement si le système (S)  $(M - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  n'est pas de Cramer. Le

$$\text{système S équivaut à : } \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 3 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(S) \iff \begin{cases} -\lambda x + y & = 0 \\ -\lambda y + z & = 0 \\ -2x + 3y - \lambda z & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \text{on effectue } L_1 \leftrightarrow L_3 \\ -2x + 3y - \lambda z & = 0 \\ -\lambda y + z & = 0 \\ -\lambda x + y & = 0 \end{cases}$$

$$\text{on effectue } L_3 \leftarrow 2L_3 - \lambda L_1$$

$$(S) \iff \begin{cases} -2x + 3y - \lambda z & = 0 \\ -\lambda y + z & = 0 \\ (2 - 3\lambda)y + \lambda^2 z & = 0 \end{cases}$$

on effectue  $L_3 \leftarrow L_3 - \lambda^2 L_2$  et on permute  $y$  et  $z$

$$\iff \begin{cases} -2x - \lambda z + 3y & = 0 \\ z - \lambda y & = 0 \\ (\lambda^3 - 3\lambda + 2)y & = 0 \end{cases}$$

Le dernier système est triangulaire supérieur, il n'est pas de Cramer si et seulement si l'un des termes diagonaux est nul, c'est-à-dire  $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$ . Cette équation admet une racine évidente  $\lambda = 1$  ; on factorise par  $(\lambda - 1)$  et l'on obtient  $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0$ . Le trinôme  $\lambda^2 + \lambda - 2$  admet comme racines  $\lambda = 1$  et  $\lambda = -2$ .

Conclusion :  $\text{spect}(M) = \{1; -2\}$

• **Recherche des sous-espaces propres notés  $E(\lambda)$ .**

\* Pour  $\lambda = -2$ ,  $E(-2)$  est déterminé par :

$$(S) \quad : \begin{cases} -2x + 2z + 3y & = 0 \\ z + 2y & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z & = -2y \\ x & = \frac{1}{2}(2z + 3y) = \frac{1}{2}(-4y + 3y) = -\frac{y}{2} \end{cases}$$

$$E(-2) = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -\frac{y}{2}, z = -2y\}$$

$$= \{u = (-\frac{y}{2}, y, -2y) \in \mathbb{R}^3 / y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{u = -\frac{y}{2}(1, -2, 4) \in \mathbb{R}^3 / y \in \mathbb{R}\}$$

$E(-2) = \text{vect}((-1, 2, -4)) : \dim E(-2) = 1.$

\* Pour  $\lambda = 1$ ,  $E(1)$  est déterminé par :

$$(S) \quad : \begin{cases} -2x - z + 3y & = 0 \\ z - y & = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = y = z$$

$$E(1) = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$$

$$= \{u = (x, x, x) \in \mathbb{R}^3 / x \in \mathbb{R}\}$$

$E(1) = \text{vect}((1, 1, 1)) : \dim E(1) = 1.$

**QUESTION-2-b)** \_\_\_\_\_

On a  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $\dim E(-2) + \dim E(1) = 2 \neq 3$  :

$M$  n'est pas diagonalisable.

**QUESTION-3-a)** \_\_\_\_\_

**Analyse de la situation :** Si une telle base existe, d'après la matrice  $T$ , on doit avoir :

$f(e'_1) = -2e'_1$ , donc comme  $e'_1 \neq 0$  cela veut dire que  $e'_1$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur  $-2$ .

$f(e'_2) = e'_2$  et  $e'_2 \neq 0$  veut dire que  $e'_2$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur  $1$

$f(e'_3) = e'_2 + e'_3 \iff (f - \text{Id})(e'_3) = e'_2$  veut dire que  $e'_3$  est un antécédent par l'endomorphisme  $(f - \text{Id})$  du vecteur  $e'_2$ .

**Synthèse :**

Prenons  $e'_1 = (1, -2, 4)$  d'après la question précédente,  $e'_2 = (1, 1, 1)$  et cherchons  $e'_3 = (x, y, z) / (f - \text{Id})(e'_3) = (1, 1, 1)$

Cette égalité équivaut à  $(M - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , d'où le système :

$$\begin{cases} -x + y & = 1 \\ -y + z & = 1 \\ -2x + 3y - z & = 1. \end{cases}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x & = y - 1 \\ z & = y + 1 \\ -2(y - 1) + 3y - (y + 1) & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = y - 1 \\ z & = y + 1 \\ 1 & = 1 \end{cases}$$

Pour  $x = 0$  (qui est exigé par le texte), on obtient  $y = 1, z = 2$ .  $e'_3 = (0, 1, 2)$

Ces trois vecteurs satisfont aux égalités :  $f(e'_1) = -2e'_1, f(e'_2) = e'_2$  et

$f(e'_3) = e'_2 + e'_3$  puisque c'est ainsi qu'on les a trouvés : **reste à vérifier qu'ils forment une base de  $\mathbb{R}^3$** . La matrice  $P$  des coordonnées en colonnes de ces vecteurs dans la

base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Effectuons  $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3$ , on obtient la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Et effectuons  $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ , cela donne  $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

**Cette matrice est triangulaire inférieure et aucun de ses termes diagonaux n'est nul, elle est donc inversible ; donc  $P$  est inversible et les vecteurs  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$  d'après le cours**

La matrice  $T$  de  $f$  dans cette base est donc bien  $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**QUESTION-3-b)**

Ecrivons  $T = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_B$

$T = A + B$  et remarquons que :  $AB = BA = B$  il faut (et il suffit de) faire le calcul. Cela implique que  $A$  et  $B$  commutent, **on peut appliquer le binôme de Newton** pour calculer  $T^n$ .

\* $B^2 = (0)$  il faut (et il suffit de) faire le calcul.

$\forall k \geq 3, \exists p \in \mathbb{N}^* / k = 2 + p$ . Alors  $B^k = B^{2+p} = B^2 \times B^p = (0) \times B^p = (0)$ .

**Ainsi**  $\forall k \geq 2, B^k = (0)$ .

Alors  $\forall n \geq 1, T^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k A^{n-k}$ , soit  $T^n = A^n + \binom{n}{1} BA^{n-1} = A^n + nBA^{n-1}$  puisque les autres termes sont nuls.



- Détermination de  $BA^{n-1}$  : on sait déjà (voir plus haut) que  $BA = B$  ; donc  $BA^2 = (BA)A = BA = B$ .

Si pour un entier  $k \geq 1$ ,  $BA^k = B$ , alors  $BA^{k+1} = (BA^k)A = BA \times A$  par hypothèse de récurrence, donc  $= BA$ .

**Nous venons de montrer par récurrence que :**  $\forall k \geq 1, BA^k = B$ .

Cette formule est encore valable pour  $k = 0$  avec la convention  $A^0 = I$ .

Alors  $\forall n \geq 1, T^n = A^n + nBA^{n-1} = A^n + nB$ . Cette formule est valable pour  $n = 0$  avec la convention  $T^0 = A^0 = I$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### QUESTION-4)

La matrice  $P$  est la matrice des coordonnées en colonnes de  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . C'est celle que nous avons déjà appelée  $P$  dans la question 3.a)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On sait que  $T = P^{-1}MP$  équivaut à  $M = PTP^{-1}$ . Un calcul hyper-classique donne  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PT^nP^{-1}$  avec la convention  $M^0 = T^0 = I$ .

#### QUESTION-5-a)

Il s'agit de calculer  $P^{-1}$

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ . Alors  $Y = PX \iff X = P^{-1}Y$ . Nous allons résoudre

le système équivalent à l'équation  $Y = PX$  et présenter les solutions sous forme matricielle pour avoir  $P^{-1}$

$$PX = Y \iff \begin{cases} x + y & = a \\ -2x + y + z & = b \\ 4x + y + 2z & = c \end{cases}$$

Effectuons  $L_2 \leftarrow L_3 - 2L_2$  :

$$PX = Y \iff \begin{cases} x + y & = a \\ 8x - y & = c - 2b \\ 4x + y + 2z & = c \end{cases}$$

Effectuons  $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$  :

$$PX = Y \iff \begin{cases} 9x & = a - 2b + c \\ 8x - y & = c - 2b \\ 4x + y + 2z & = c \end{cases}$$

La résolution ne pose plus de problème car le système est triangularisé et l'on obtient :

$$\begin{cases} x & = \frac{1}{9}(a - 2b + c) \\ y & = \frac{1}{9}(8a + 2b - c) \\ z & = \frac{1}{9}(-6a + 3b + 3c) \end{cases}$$

$$\text{Matriciellement cela donne } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

**QUESTION-5-b)**

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} (-2)^n & 1 & n \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} (-2)^n + 8 - 6n & (-2)^{n+1} + 2 + 3n & (-2)^n - 1 + 3n \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'après la première question,  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = M^n X_0$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = \frac{1}{9} \left( ((-2)^n + 8 - 6n)u_0 + ((-2)^{n+1} + 2 + 3n)u_1 + ((-2)^n - 1 + 3n)u_2 \right).$$

**II. Etude du cas général**

**1. Structure de F**

a)

$F$  est inclus dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ; il est non vide car la suite nulle  $(\omega_n)$  (définie par  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\omega_n = 0$ ) est dans  $F$ . De plus, si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites de  $F$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la suite  $(s_n)$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $s_n = \lambda u_n + v_n$  vérifie :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, s_{n+3} &= \lambda u_{n+3} + v_{n+3} \\ &= \lambda(3\lambda u_{n+1} + (1 - 3\lambda)u_n) + 3\lambda v_{n+1} + (1 - 3\lambda)v_n \\ &= 3\lambda(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + (1 - 3\lambda)(\lambda u_n + v_n) \\ &= 3\lambda s_{n+1} + (1 - 3\lambda)s_n \end{aligned}$$

Donc la suite  $(s_n)$  est dans  $F$

Conclusion :  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

b)

$$\begin{aligned} \forall (u_n) \in F, \forall (v_n) \in F \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ \varphi(\lambda(u_n) + (v_n)) &= (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1, \lambda u_2 + v_2) \\ &= \lambda(u_0, u_1, u_2) + (v_0, v_1, v_2) \\ &= \lambda\varphi((u_n)) + \varphi((v_n)) \end{aligned}$$

$\varphi$  est une application linéaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

• **Déterminons le noyau de  $\varphi$ .**

$(u_n) \in F$  est dans le noyau de  $\varphi$  si et seulement si  $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ . **Par une récurrence forte**, on montre qu'alors  $(u_n)$  est la suite nulle :

en effet, soit  $Q_n$  la propriété "  $\forall k \leq n, u_k = 0$  " .

**Initialisation :**  $Q_0, Q_1$  et  $Q_2$  sont satisfaites.