



# ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

## MATH II ECONOMIQUE

Dans tout le problème, on considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de « pile » et de « face » sont équiprobables. On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ .

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on désigne par  $R_n$  l'événement « *pile apparaît au lancer de rang  $n$*  » et par  $S_n$  l'événement « *face apparaît au lancer de rang  $n$*  »

### Partie I : Un résultat utile

On considère une variable aléatoire  $X$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , prenant ses valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  et, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :  $a_n = \mathbf{P}([X = n])$ .

1. a) Justifier que la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est une suite de nombres réels positifs ou nuls vérifiant  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$ .  
b) Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ , la série de terme général  $a_n x^n$  est convergente.

2. On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, 1]$  par :  $\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ .

On suppose que cette fonction est dérivable au point 1 ; elle vérifie donc :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(1)$$

- a) Établir pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0, 1[$  l'égalité :  $\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$ .
- b) En déduire que la fonction  $x \mapsto \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$  est croissante sur  $[0, 1[$  et qu'elle vérifie pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0, 1[$  les inégalités suivantes :  $0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq f'(1)$ .
- c) Montrer que, pour tout entier naturel  $N$  non nul, on a :  $0 \leq \sum_{n=1}^N n a_n \leq f'(1)$ .  
En déduire que la série de terme général  $n a_n$  est convergente.

d) À l'aide des résultats des question a) et c), justifier pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0, 1[$ ,

$$\text{les inégalités suivantes : } 0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1)$$

e) Montrer que la variable aléatoire  $X$  admet une espérance donnée par :

$$\mathbf{E}(X) = f'(1)$$

## Partie II : Loi du temps d'attente de la première configuration « pile, pile, face »

Soit  $Y$  la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un face précédé de deux piles si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.

Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire  $Y$  prend la valeur 9.

On pose  $c_1 = c_2 = 0$  et, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3 :  $c_n = \mathbf{P}([Y = n])$ .

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, on note  $B_n$  l'événement  $R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n$  et  $U_n$  l'événement  $\bigcup_{i=3}^n B_i$ .

1. On pose  $u_1 = u_2 = 0$ , et pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3 :  $u_n = \mathbf{P}(U_n)$ .

Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est monotone et convergente.

2. a) Calculer, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, la probabilité de l'événement  $B_n$ .

b) Vérifier que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, les événements  $B_n, B_{n+1}$  et  $B_{n+2}$  sont deux à deux incompatibles.

c) En déduire les valeurs des nombres  $u_3, u_4$  et  $u_5$ .

3. Soit  $n$  un entier  $n$  supérieur ou égal à 5.

a) Justifier l'égalité des événements  $U_n \cap B_{n+1}$  et  $U_{n-2} \cap B_{n+1}$  et préciser leur probabilité.

b) Exprimer l'événement  $U_{n+1}$  en fonction des événements  $U_n$  et  $B_{n+1}$  ; en déduire l'égalité suivante :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$

c) Vérifier les égalités suivantes  $u_3 = u_2 + \frac{1}{8}(1 - u_1)$  et  $u_4 = u_3 + \frac{1}{8}(1 - u_2)$ .

d) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  et en déduire la probabilité de l'événement  $[Y = 0]$ .

4. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :  $v_n = 1 - u_n$ .

a) Préciser les nombres  $v_1, v_2, v_3, v_4$ .

b) Exprimer, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3,  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$  et de  $v_{n-2}$ .

c) En déduire pour tout entier  $N$  supérieur ou égal à 1, l'égalité suivante :  $\frac{7}{8} - v_{N+3} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^N v_k$ .

d) Montrer que la série de terme général  $v_n$  est convergente et calculer sa somme.

5. Soit  $g$  et  $h$  les fonctions définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n$$

a) Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 4. Exprimer l'événement  $[Y = n]$  en fonction des événements  $\overline{U_{n-1}}$  et  $U_n$  ( $\overline{U_{n-1}}$  désignant l'événement contraire de  $U_{n-1}$ ). En déduire l'égalité :  $c_n = v_{n-1} - v_n$ .

b) Valider l'égalité  $c_n = v_{n-1} - v_n$  dans le cas où  $n$  est égal à 2 ou 3.

c) Établir pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ , l'égalité :  $g(x) = (x-1)h(x) + x$ .

d) Exprimer pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1[$ , le quotient  $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$  en fonction de  $h(x)$ .

e) Justifier la croissance de la fonction  $h$  et, pour tout entier naturel  $N$  non nul et tout nombre réel

$x$  de l'intervalle  $[0, 1]$ , la double inégalité suivante :  $\sum_{k=1}^N v_k x^k \leq h(x) \leq h(1)$ .

En déduire la relation suivante :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} h(x) = h(1)$ .

- f) Montrer que  $g$  est dérivable au point 1 et, à l'aide de la **Partie I**, en déduire que la variable aléatoire  $Y$  admet une espérance égale à 8.

### Partie III : Paradoxe de Walter Penney (1969)

Deux joueurs  $J$  et  $J'$  s'affrontent dans un jeu utilisant la même expérience aléatoire que précédemment avec les règles suivantes :

- le joueur  $J$  est gagnant si la configuration « pile, pile, face » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « face, pile, pile » n'apparaisse ;
- le joueur  $J'$  est gagnant si la configuration « face, pile, pile » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « pile, pile, face » n'apparaisse ;
- si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant.

On se propose de démontrer que, dans ce jeu, le joueur  $J'$  possède un net avantage sur le joueur  $J$ .

1. Soit  $Y'$  la variable aléatoire désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un pile précédé d'un pile lui-même précédé d'un face si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.

Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire  $Y'$  prend la valeur 6.

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, on désigne par  $B'_n$  l'événement  $S_{n-2} \cap R_{n-1} \cap R_n$ , par  $U'_n$  l'événement  $\bigcup_{i=3}^n B'_i$  et on note  $u'_n$  la probabilité de  $U'_n$ .

- a) Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3.

Les événements  $B'_n, B'_{n+1}$  et  $B'_{n+2}$  sont-ils deux à deux incompatibles ?

- b) En déduire que, si on pose  $u'_1 = u'_2 = 0$ , le même raisonnement que dans la **Partie II**, conduit à l'égalité  $u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}(1 - u'_{n-2})$ , pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3.

- c) En déduire l'égalité des suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(u'_n)_{n \geq 1}$ .

- d) Prouver que les deux variables aléatoires  $Y$  et  $Y'$  suivent la même loi et vérifient :  $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(Y')$ .

2. Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, on note  $G_n$  l'événement « le joueur  $J$  est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang  $n$  » et  $g_n$  la probabilité de  $G_n$ .

- a) Calculer  $g_3$  et  $g_4$  et établir, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, l'égalité suivante :  $g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

- b) En déduire la probabilité pour que le joueur  $J$  soit déclaré gagnant.

3. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on désigne par  $d_n$  la probabilité que lors des  $n$  premiers lancers n'apparaissent jamais deux piles consécutifs.

- a) Préciser  $d_1$  et  $d_2$ .

- b) En considérant les résultats des lancers de rang 1 et 2, justifier pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'égalité suivante :  $d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$ .

- c) Montrer qu'il existe deux constantes réelles  $\alpha$  et  $\beta$  que l'on ne cherchera pas à calculer, telles que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on ait :  $d_n = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right)^n$ .

- d) En déduire que la série de terme général  $d_n$  converge et, en utilisant l'égalité du b), prouver

l'égalité suivante :  $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$ .

4. On désigne par  $T$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang du lancer à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant, si cela se produit, et la valeur 0 si aucun des joueurs n'est gagnant.

- a) Justifier, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, l'égalité :  $P([T > n] \cup [T = 0]) = \frac{1}{2^n} + d_n$ .

- b) En déduire, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, l'égalité :  $P([T = n]) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$ .

- c) Montrer que la probabilité que l'un des joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1.
5. Calculer la probabilité que le joueur  $J'$  soit déclaré gagnant et conclure.
6. Si la configuration gagnante du joueur  $J$  avait été « pile, pile, face, pile, pile, face » et la configuration gagnante du joueur  $J'$  avait été « face, face, pile, face, face, pile », quelle aurait-été la conclusion ?
7. Soit  $d$  et  $t$  les fonctions définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad d(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n \quad \text{et} \quad t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T = n]) x^n$$

- a) Établir pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$  l'égalité suivante :

$$t(x) = (x - 1) \left( d(x) + \frac{x^2}{2(2 - x)} \right) + x$$

- b) Exprimer pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1[$ , le quotient  $\frac{t(x) - t(1)}{x - 1}$  en fonction de  $d(x)$ .
- c) En s'inspirant de la question 5.e de la **Partie II**, justifier l'égalité suivante :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} d(x) = d(1)$ .
- d) Montrer que la variable aléatoire  $T$  admet une espérance et préciser  $\mathbf{E}(T)$ .

#### Partie IV : Simulation informatique

On rappelle que dans un programme PASCAL, l'instruction «  $r := \text{RANDOM}(2)$  » a pour effet de donner aléatoirement à la variable  $r$  la valeur 0 ou 1, ces deux valeurs étant équiprobables.

On considère la procédure PASCAL suivante :

```

PROCEDURE Quigagne ;
  VAR x,y,r,k :INTEGER ;
  BEGIN
    x :=0 ; y :=0 ; k :=0 ;
    WHILE (x<3) AND (y<3) DO
      BEGIN
        k :=k+1 ; r :=RANDOM(2) ;
        IF r=1 THEN BEGIN
          IF x>=1 THEN x :=2 ELSE x :=1 ;
          IF y>=1 THEN y :=y+1 ;
        END
        ELSE BEGIN
          IF x=2 THEN x :=3
            ELSE x :=0 ;
          y :=1 ;
        END ;
      END ;
    IF x=3 THEN WRITE ('...') ELSE WRITE('...') ;
  END ;

```

1. Donner sous forme d'un tableau les valeurs successives prises par les variables  $x$ ,  $y$  et  $k$  lors de l'exécution de cette procédure, si les valeurs données à la variable  $r$  par la fonction «  $\text{RANDOM}(2)$  » sont successivement :
- 1, 1, 1, 1, 0
  - 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1
  - 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1
2. Que représente la dernière valeur prise dans la procédure par la variable  $k$  et quels textes pourrait-on substituer aux pointillés de la dernière instruction ?  
Qu'afficherait alors l'ordinateur dans les trois exemples de la question précédente ?



## ANNALES DE MATHEMATIQUES 2004

## HEC, ESCP-EAP, EM LYON 2004 VOIE E

## CORRIGE

## PARTIE I : un résultat utile

## 1. a)

On sait que le système  $(X = n)_{n \geq 1}$  est un système complet d'événements, donc

$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$ . Mais le texte semble vouloir une démonstration :

On a évidemment  $P(X = n) \geq 0$ . Notons  $V_n = \bigcup_{k=1}^n (X = k)$ . La suite  $(V_n)$  est croissante

pour l'inclusion, donc par continuité croissante,  $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(V_n)$ . Or  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} V_n =$

$\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X = n) = \Omega$  (événements 2 à 2 incompatibles) et  $P(V_n) = \sum_{k=1}^n P(X = k) = \sum_{k=1}^n a_k$  ; on

obtient  $1 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$

## b)

Pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a :  $0 \leq x^n \leq 1$  ; multiplions cet encadrement par  $a_n \geq 0$ , il vient :  $0 \leq a_n x^n \leq a_n$ . La série  $\sum a_n x^n$  est une série à termes positifs, majorée par la série  $\sum a_n$  qui converge (on vient de le voir).

Par **comparaison des séries à termes positifs**, on conclut que la série  $\sum a_n x^n$  est convergente pour tout  $x \in [0; 1]$

## 2. a)

Les séries  $\sum a_n$  et  $\sum a_n x^n$ , sont convergentes pour  $x \in [0; 1]$  ;

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_n x^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (1 - x^n)$  (rappelons que l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel réel).

Donc pour  $x \in [0; 1[$ ,  $f(1) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (1 - x^n)$  et on peut diviser par  $1 - x \neq 0$ . Il vient

$$\begin{aligned} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} &= \frac{1}{1 - x} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (1 - x^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{1 - x^n}{1 - x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \end{aligned}$$

car on a reconnu, dans  $\frac{1-x^n}{1-x}$ , le résultat de la somme des  $n$  premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison  $x \neq 1$ .

$$\forall x \in [0; 1[, \frac{f(1) - f(x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$$

b)

Sur  $[0; 1[$ , la fonction  $x \mapsto a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k$  est croissante (il suffit de dériver : la dérivée est positive ou nulle). Donc

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall (x, y) \in ([0; 1])^2$  ( $x < y \implies a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq a_n \sum_{k=0}^{n-1} y^k$ ). Sommons ces inégalités pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , il vient  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} y^k \right)$  : on a donc montré que

$$\forall (x, y) \in ([0; 1])^2 \quad (x < y \implies \frac{f(1) - f(x)}{1-x} \leq \frac{f(1) - f(y)}{1-y}) :$$

$$x \mapsto \frac{f(1) - f(x)}{1-x} \text{ est croissante sur } [0; 1[$$

La fonction  $f$  est croissante sur  $[0; 1[$  car,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  ( $0 \leq x < y < 1 \implies a_n x^n \leq a_n y^n$ ) et par sommation  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n y^n$ . On a alors la situation suivante :  $x \mapsto \frac{f(1) - f(x)}{1-x}$  est positive d'après le résultat de la question précédente, elle admet au point 1 une limite à gauche notée  $f'(1)$  et elle est croissante sur  $[0; 1[$ , donc inférieure ou égale à sa limite en 1.

$$\forall x \in [0; 1[, \quad 0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1-x} \leq f'(1)$$

c)

Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [0; 1[$ , on a  $\sum_{n=1}^N a_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) = \frac{f(1) - f(x)}{1-x}$  puisque tous les termes sont positifs ou nuls. Donc, compte tenu de l'inégalité de la question précédente, on obtient l'inégalité

$$\sum_{n=1}^N a_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \leq f'(1) \quad (1)$$

Notons  $P_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$ . Par continuité de  $P_N$  (c'est une fonction polynomiale),

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} P_N(x) = P_N(1) = \sum_{n=1}^N a_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} 1^k \right) = \sum_{n=1}^N n a_n.$$

L'inégalité précédente (1) devient alors :  $P_N(1) \leq f'(1)$ , soit  $\sum_{n=1}^N n a_n \leq f'(1)$ .

La série de terme général  $n a_n$  est une série à termes positifs, la suite des sommes partielles  $\left( \sum_{k=1}^N n a_n \right)_{N \geq 1}$  est majorée, donc la **série de terme général  $n a_n$  est convergente**

d)

En passant à la limite quand  $N \rightarrow +\infty$  dans l'inégalité  $\sum_{n=1}^N na_n \leq f'(1)$ , on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leq f'(1). \quad (2)$$

D'autre part, puisque  $\forall x \in [0; 1[$ ,  $\sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq n$  on a :  $a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq na_n$  car  $a_n \geq 0$ . On peut sommer ces inégalités de  $n = 1$  à  $+\infty$  puisque les séries sont convergentes : il vient  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n$ , c'est-à-dire

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \quad (2')$$

Finalement en rassemblant les inégalités (2) et (2') on obtient :

$$\forall x \in [0; 1[, \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leq f'(1)$$

e)

La série de terme général  $na_n = nP(X = n)$  est absolument convergente (elle est convergente d'après la question 2. b) et positive ou nulle) :

la variable  $X$  admet une espérance

Dans l'inégalité précédente faisons tendre  $x$  vers  $1^-$  ; comme les deux termes de droite ne dépendent pas de  $x$  et que le terme de gauche a pour limite  $f'(1)$ , **par encadrement on obtient**  $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n = f'(1)$ .

La variable  $X$  admet une espérance et  $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n = f'(1)$

## PARTIE II : loi d'attente de la première configuration « pile, pile, face »

1.

$U_n = \bigcup_{i=3}^n B_i$ , donc  $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$  ; il s'ensuit que  $\forall n \geq 3$ ,  $U_n \subset U_{n+1}$ , donc  $P(U_n) \leq P(U_{n+1})$  : on a donc  $\forall n \geq 3$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$  ; de plus  $u_1 = u_2 = 0$  donc

la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est croissante

2. a)

$B_n = R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n$ . Les tirages se font avec remise : ils sont indépendants et les événements  $R_{n-2}$ ,  $R_{n-1}$ ,  $S_n$  également. De plus ils ont pour probabilité  $\frac{1}{2}$ , donc :

$$\forall n \geq 3, P(B_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$