ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

MATH II ECONOMIQUE

Dans tout le problème, on considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de « pile » et de « face » sont équiprobables.
On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par R_n l'événement « *pile apparaît au lancer de rang n* » et par S_n l'événement « *face apparaît au lancer de rang n* »

Partie I : Un résultat utile

On considère une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout entier naturel non nul n, on pose : $a_n = \mathbf{P}([X = n])$.

1. a) Justifier que la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de nombres réels positifs ou nuls vérifiant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$.

b) Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0,1]$, la série de terme général $a_n x^n$ est convergente.

2. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

On suppose que cette fonction est dérivable au point 1 ; elle vérifie donc :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(1)$$

a) Établir pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$ l'égalité : $\displaystyle\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$.

b) En déduire que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ est croissante sur $[0,1[$ et qu'elle vérifie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$ les inégalités suivantes : $0 \leqslant \dfrac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leqslant f'(1)$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel N non nul, on a : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} n a_n \leqslant f'(1)$.

En déduire que la série de terme général $n a_n$ est convergente.

d) À l'aide des résultats des question a) et c), justifier pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$, les inégalités suivantes : $0 \leqslant \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leqslant f'(1)$

e) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance donnée par :

$$\mathbf{E}(X) = f'(1)$$

Partie II : Loi du temps d'attente de la première configuration « pile, pile, face »

Soit Y la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un face précédé de deux piles si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.

Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire Y prend la valeur 9.

On pose $c_1 = c_2 = 0$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $c_n = \mathbf{P}([Y = n])$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note B_n l'événement $R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n$ et U_n l'événement $\displaystyle\bigcup_{i=3}^{n} B_i$.

1. On pose $u_1 = u_2 = 0$, et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_n = \mathbf{P}(U_n)$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est monotone et convergente.

2. a) Calculer, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, la probabilité de l'événement B_n.

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

c) En déduire les valeurs des nombres u_3, u_4 et u_5.

3. Soit n un entier n supérieur ou égal à 5.

a) Justifier l'égalité des événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$ et préciser leur probabilité.

b) Exprimer l'événement U_{n+1} en fonction des événements U_n et B_{n+1} ; en déduire l'égalité suivante : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

c) Vérifier les égalités suivantes $u_3 = u_2 + \dfrac{1}{8}(1-u_1)$ et $u_4 = u_3 + \dfrac{1}{8}(1-u_2)$.

d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et en déduire la probabilité de l'événement $[Y = 0]$.

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $v_n = 1 - u_n$.

a) Préciser les nombres v_1, v_2, v_3, v_4.

b) Exprimer, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, v_{n+1} en fonction de v_n et de v_{n-2}.

c) En déduire pour tout entier N supérieur ou égal à 1, l'égalité suivante : $\dfrac{7}{8} - v_{N+3} = \dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} v_k$.

d) Montrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer sa somme.

5. Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n$$

a) Soit n un entier supérieur ou égal à 4. Exprimer l'événement $[Y = n]$ en fonction des événements $\overline{U_{n-1}}$ et U_n ($\overline{U_{n-1}}$ désignant l'événement contraire de U_{n-1}). En déduire l'égalité : $c_n = v_{n-1} - v_n$.

b) Valider l'égalité $c_n = v_{n-1} - v_n$ dans le cas où n est égal à 2 ou 3.

c) Établir pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0,1]$, l'égalité : $g(x) = (x-1)h(x) + x$.

d) Exprimer pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0,1[$, le quotient $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ en fonction de $h(x)$.

e) Justifier la croissance de la fonction h et, pour tout entier naturel N non nul et tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1]$, la double inégalité suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} v_k x^k \leqslant h(x) \leqslant h(1)$.

En déduire la relation suivante : $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} h(x) = h(1)$.

f) Montrer que g est dérivable au point 1 et, à l'aide de la **Partie I**, en déduire que la variable aléatoire Y admet une espérance égale à 8.

Partie III : Paradoxe de Walter Penney (1969)

Deux joueurs J et J' s'affrontent dans un jeu utilisant la même expérience aléatoire que précédemment avec les règles suivantes :

- le joueur J est gagnant si la configuration « pile, pile, face » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « face, pile, pile » n'apparaisse ;
- le joueur J' est gagnant si la configuration « face, pile, pile » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « pile, pile, face » n'apparaisse ;
- si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant.

On se propose de démontrer que, dans ce jeu, le joueur J' possède un net avantage sur le joueur J.

1. Soit Y' la variable aléatoire désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un pile précédé d'un pile lui-même précédé d'un face si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais.
Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire Y' prend la valeur 6.
Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on désigne par B'_n l'événement $S_{n-2} \cap R_{n-1} \cap R_n$, par U'_n l'événement $\bigcup_{i=3}^{n} B'_i$ et on note u'_n la probabilité de U'_n.

a) Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
Les événements B'_n, B'_{n+1} et B'_{n+2} sont-ils deux à deux incompatibles ?

b) En déduire que, si on pose $u'_1 = u'_2 = 0$, le même raisonnement que dans la **Partie II**, conduit à l'égalité $u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}(1 - u'_{n-2})$, pour tout entier n supérieur ou égal à 3.

c) En déduire l'égalité des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(u'_n)_{n\geqslant 1}$.

d) Prouver que les deux variables aléatoires Y et Y' suivent la même loi et vérifient : $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(Y')$.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note G_n l'événement « *le joueur J est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n* » et g_n la probabilité de G_n.

a) Calculer g_3 et g_4 et établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, l'égalité suivante : $g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) En déduire la probabilité pour que le joueur J soit déclaré gagnant.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par d_n la probabilité que lors des n premiers lancers n'apparaissent jamais deux piles consécutifs.

a) Préciser d_1 et d_2.

b) En considérant les résultats des lancers de rang 1 et 2, justifier pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante : $d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$.

c) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β que l'on ne cherchera pas à calculer, telles que, pour tout tout entier naturel n non nul, on ait : $d_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$.

d) En déduire que la série de terme général d_n converge et, en utilisant l'égalité du b), prouver l'égalité suivante : $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$.

4. On désigne par T la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang du lancer à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant, si cela se produit, et la valeur 0 si aucun des joueurs n'est gagnant.

a) Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité : $\mathrm{P}([T > n] \cup [T = 0]) = \frac{1}{2^n} + d_n \cdot$

b) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, l'égalité : $\mathrm{P}([T = n]) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n \cdot$

c) Montrer que la probabilité que l'un des joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1.

5. Calculer la probabilité que le joueur J' soit déclaré gagnant et conclure.

6. Si la configuration gagnante du joueur J avait été « pile, pile, face, pile, pile, face » et la configuration gagnante du joueur J' avait été « face, face, pile, face, face, pile », quelle aurait-été la conclusion ?

7. Soit d et t les fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad d(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n \quad \text{et} \quad t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T=n])x^n$$

a) Établir pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0,1]$ l'égalité suivante :

$$t(x) = (x-1)\left(d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)}\right) + x$$

b) Exprimer pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0,1[$, le quotient $\dfrac{t(x)-t(1)}{x-1}$ en fonction de $d(x)$.

c) En s'inspirant de la question **5.**e de la **Partie II**, justifier l'égalité suivante : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} d(x) = d(1)$.

d) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance et préciser $\mathbf{E}(T)$.

Partie IV : Simulation informatique

On rappelle que dans un programme PASCAL, l'instruction « r :=RANDOM(2) » a pour effet de donner aléatoirement à la variable r la valeur 0 ou 1, ces deux valeurs étant équiprobables.
On considère la procédure PASCAL suivante :

```
PROCEDURE Quigagne;
  VAR x,y,r,k :INTEGER;
  BEGIN
       x :=0; y :=0;k :=0;
       WHILE (x<3) AND (y<3) DO
               BEGIN
                 k :=k+1; r :=RANDOM(2);
                 IF r=1 THEN BEGIN
                                 IF x>=1 THEN x :=2 ELSE x :=1;
                                 IF y>=1 THEN y :=y+1;
                               END
                        ELSE BEGIN
                                IF x=2 THEN x :=3
                                        ELSE x :=0;
                                y :=1;
                              END;
               END;
       IF x=3 THEN WRITE ('...') ELSE WRITE('...');
  END;
```

1. Donner sous forme d'un tableau les valeurs successives prises par les variables x, y et k lors de l'exécution de cette procédure, si les valeurs données à la variable r par la fonction « RANDOM(2) » sont successivement :

a) 1, 1, 1, 1, 0

b) 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1

c) 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1

2. Que représente la dernière valeur prise dans la procédure par la variable k et quels textes pourrait-on substituer aux pointillés de la dernière instruction ?
Qu'afficherait alors l'ordinateur dans les trois exemples de la question précédente ?

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2004

HEC, ESCP-EAP, EM LYON 2004 VOIE E

CORRIGE

PARTIE I : un résultat utile

1. a)

On sait que le système $(X = n)_{n\geq 1}$ est un système complet d'événements, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$. Mais le texte semble vouloir une démonstration :

On a évidemment $P(X = n) \geq 0$. Notons $V_n = \bigcup_{k=1}^{n}(X = k)$. La suite (V_n) est croissante pour l'inclusion, donc par continuité croissante, $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} V_n) = \lim_{n\to+\infty} P(V_n)$. Or $\bigcup_{n=1}^{+\infty} V_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(X = n) = \Omega$ (événements 2 à 2 incompatibles) et $P(V_n) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} a_k$; on obtient $1 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$

b)

Pour tout $x \in [0; 1]$, on a : $0 \leq x^n \leq 1$; multiplions cet encadrement par $a_n \geq 0$, il vient : $0 \leq a_n x^n \leq a_n$. La série $\sum a_n x^n$ est une série à termes positifs , majorée par la série $\sum a_n$ qui converge (on vient de le voir).

Par **comparaison des séries à termes positifs**, on conclut que la série $\sum a_n x^n$ est convergente pour tout $x \in [0; 1]$

2. a)

Les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n x^n$, sont convergentes pour $x \in [0; 1]$;

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_n x^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(1 - x^n)$ (rappelons que l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel réel).

Donc pour $x \in [0; 1[$, $f(1) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(1 - x^n)$ et on peut diviser par $1 - x \neq 0$. Il vient

$$\begin{aligned}\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} &= \frac{1}{1 - x}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(1 - x^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{1 - x^n}{1 - x}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big)\end{aligned}$$

car on a reconnu, dans $\frac{1-x^n}{1-x}$, le résultat de la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $x \neq 1$.

$$\boxed{\forall x \in [0;1[,\ \frac{f(1)-f(x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big)}$$

b)

Sur $[0;1[$, la fonction $x \mapsto a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k$ est croissante (il suffit de dériver : la dérivée est positive ou nulle). Donc

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x,y) \in ([0;1[)^2\ (x < y \Longrightarrow a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq a_n \sum_{k=0}^{n-1} y^k)$. Sommons ces inégalités pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Big(\sum_{k=0}^{n-1} y^k\Big)$: on a donc montré que

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall (x,y) \in ([0;1[)^2\ (x < y \Longrightarrow \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq \dfrac{f(1)-f(y)}{1-y}) : \\ x \mapsto \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \text{ est croissante sur } [0;1[\end{array}}$$

La fonction f est croissante sur $[0;1[$ car, $\forall n \in \mathbb{N}^*\ (0 \leq x < y < 1 \Longrightarrow a_n x^n \leq a_n y^n)$ et par sommation $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n y^n$. On a alors la situation suivante : $x \mapsto \frac{f(1)-f(x)}{1-x}$ est positive d'après le résultat de la question précédente, elle admet au point 1 une limite à gauche notée $f'(1)$ et elle est croissante sur $[0;1[$, donc inférieure ou égale à sa limite en 1.

$$\boxed{\forall x \in [0;1[,\ 0 \leq \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq f'(1)}$$

c)

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;1[$, on a $\sum_{n=1}^{N} a_n \Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big) = \frac{f(1)-f(x)}{1-x}$ puisque tous les termes sont positifs ou nuls. Donc , compte tenu de l'inégalité de la question précédente, on obtient l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big) \leq f'(1) \qquad \textbf{(1)}$$

Notons $P_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big)$. Par continuité de P_N (c'est une fonction polynomiale), $\lim\limits_{x \to 1^-} P_N(x) = P_N(1) = \sum_{n=1}^{N} a_n \Big(\sum_{k=0}^{n-1} 1^k\Big) = \sum_{n=1}^{N} n a_n$.

L'inégalité précédente **(1)** devient alors : $P_N(1) \leq f'(1)$, soit $\sum_{n=1}^{N} n a_n \leq f'(1)$.

> La série de terme général $n a_n$ est une série à termes positifs, la suite des sommes partielles $\Big(\sum_{k=1}^{N} n a_n\Big)_{N \geq 1}$ est majorée, donc la **série de terme général $n a_n$ est convergente**

d)

En passant à la limite quand $N \to +\infty$ dans l'inégalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} na_n \leq f'(1)$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leq f'(1). \qquad \textbf{(2)}$$

D'autre part, puisque $\forall x \in [0;1[,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq n$ on a : $a_n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq na_n$ car $a_n \geq 0$. On peut sommer ces inégalités de $n = 1$ à $+\infty$ puisque les séries sont convergentes : il vient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n$, c'est-à-dire

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \qquad \textbf{(2')}$$

Finalement en rassemblant les inégalités **(2)** et **(2')** on obtient :

$$\boxed{\forall x \in [0;1[,\ \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leq f'(1)}$$

e)

La série de terme général $na_n = nP(X = n)$ est absolument convergente (elle est convergente d'après la question **2. b)** et positive ou nulle) :

$$\boxed{\text{la variable } X \text{ admet une espérance}}$$

Dans l'inégalité précédente faisons tendre x vers 1^- ; comme les deux termes de droite ne dépendent pas de x et que le terme de gauche a pour limite $f'(1)$, **par encadrement on obtient** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n = f'(1)$.

$$\boxed{\text{La variable } X \text{ admet une espérance et } E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n = f'(1)}$$

PARTIE II : loi d'attente de la première configuration « pile, pile, face »

1.

$U_n = \displaystyle\bigcup_{i=3}^{n} B_i$, donc $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$; il s'ensuit que $\forall n \geq 3,\ U_n \subset U_{n+1}$, donc $P(U_n) \leq P(U_{n+1})$: on a donc $\forall n \geq 3,\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1}$; de plus $u_1 = u_2 = 0$ donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq 1} \text{ est croissante}}$$

2. a)

$B_n = R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n$. Les tirages se font avec remise : ils sont indépendants et les événements $R_{n-2},\ R_{n-1},\ S_n$ également. De plus ils ont pour probabilité $\frac{1}{2}$, donc :

$$\boxed{\forall n \geq 3,\ P(B_n) = (\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{1}{8}}$$