



EXERCICE

1. Étude d'une suite et programmation

On note $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie pour tout entier n strictement positif par :

$$c_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$$

- Montrer que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.
- Montrer que, pour tout entier n strictement positif, l'on a : $c_{n+1} + c_n = \frac{1}{n}$.
- Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité : $\frac{1}{n} \leq 2c_n \leq \frac{1}{n-1}$.
En déduire un équivalent simple de c_n quand n tend vers l'infini.
- Calculer c_1 et prouver, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right)$$

- Écrire un programme en Turbo-Pascal qui, pour une valeur d'un entier n strictement positif entrée par l'utilisateur, calcule et affiche la valeur de c_n .

2. Étude d'une suite de variables aléatoires à densité

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{1}{c_n t^n (1+t)} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

- À l'aide d'un changement de variable, établir pour tout entier n strictement positif et pour tout réel x supérieur ou égal à 1, l'égalité : $\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)} dt = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du$.
- En déduire que, pour tout entier n strictement positif, f_n est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, telle que, pour tout entier n strictement positif, X_n prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$ et admet f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n .

- c) Pour quelles valeurs de n la variable aléatoire X_n admet-elle une espérance? Dans le cas où l'espérance de X_n existe, calculer cette espérance en fonction de c_n et de c_{n-1} .
- d) Dans cette question, exclusivement, on suppose que n est égal à 1. Préciser la fonction F_1 .
En déduire l'ensemble des réels y vérifiant $\mathbf{P}([X_1 \leq y]) \geq \frac{1}{2}$.
Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z = \ln(X_1)$.
- e) Soit x un réel strictement supérieur à 1.
Justifier l'encadrement : $0 \leq \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du \leq \frac{1}{n+1}$.
En déduire la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} du \right)$.
- Transformer, pour tout entier naturel n non nul, $F_n(x)$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire l'égalité suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1$.
- f) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$ si x est un réel inférieur ou égal à 1? Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable que l'on précisera.

PROBLÈME

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n$.

Pour tout entier naturel non nul k , on note X^k le polynôme $x \mapsto x^k$ et on rappelle que la famille $(1, X, \dots, X^{2n})$ est une base de E .

Si a_0, a_1, \dots, a_{2n} sont $2n+1$ réels et Q est le polynôme défini sur \mathbb{R} par : $Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$,

on définit le polynôme $s(Q)$ par : $s(Q)(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} x^k$.

Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en « inversant l'ordre des coefficients ».

Par exemple, si n est égal à 2 et si $Q(x) = 4x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 1$, on obtient $s(Q)(x) = x^4 + 2x^2 + 7x + 4$.

Les trois parties de ce problème sont largement indépendantes.

PARTIE A

1. Linéarité de s

Montrer que l'application $s : Q \mapsto s(Q)$ est une application linéaire de E dans lui-même.

2. Diagonalisation dans un cas particulier

- a) On considère la matrice carrée d'ordre 3 : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Justifier sans calcul que la matrice M est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres de M et, pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

- b) Vérifier que, dans le cas particulier $n = 1$, M est la matrice de l'application linéaire s dans la base $(1, X, X^2)$. Donner alors une base de vecteurs propres pour s .

3. Etude du cas général

On définit la famille de polynômes (A_0, \dots, A_{2n}) par :

$$\text{pour tout réel } x, \quad \begin{cases} A_k(x) = x^{2n-k} + x^k & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ A_n(x) = x^n \\ A_k(x) = x^k - x^{2n-k} & \text{si } n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}$$

- Déterminer l'endomorphisme $s \circ s$.
- Soit P un polynôme non nul et λ un réel vérifiant $s(P) = \lambda P$.
Calculer $s \circ s(P)$ et en déduire que les valeurs propres de s appartiennent à $\{1, -1\}$.
- Déterminer $s(A_k)$ pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq 2n$.
- Montrer que la famille (A_0, \dots, A_{2n}) est libre.
- En déduire que l'endomorphisme s est diagonalisable, préciser ses valeurs propres et la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

PARTIE B

1. Préliminaires

On définit une suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes par :

pour tout réel x , $R_1(x) = x$, $R_2(x) = x^2 - 2$

et pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $R_{k+1}(x) = xR_k(x) - R_{k-1}(x)$

- Déterminer les polynômes R_3 et R_4 .
- Montrer que, pour tout entier k strictement positif, R_k est un polynôme de degré k vérifiant pour tout réel x non nul, l'égalité : $R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}$.
- Pour tout réel a , déterminer, s'ils existent, les réels x non nuls qui vérifient la relation suivante : $x + \frac{1}{x} = a$.

2. Étude des racines des polynômes vecteurs propres de s associés à la valeur propre 1

Dans cette question, Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini par : $Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$, tel que a_{2n} soit non nul et tel que, pour tout entier k de l'intervalle $[[0, n]]$, l'on ait : $a_k = a_{2n-k}$.

On définit alors le polynôme \tilde{Q} par : $\tilde{Q}(x) = a_n + \sum_{k=1}^n a_{n-k} R_k(x)$.

- Vérifier que 0 n'est pas racine de Q .
- Soit x un réel non nul, on pose : $y = x + \frac{1}{x}$.
Montrer que $\frac{Q(x)}{x^n}$ est nul si et seulement si $\tilde{Q}(y)$ est nul.
Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de Q ?
- On suppose que n est égal à 3 et que Q est défini par :
 $Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1$.
Déterminer les racines de Q .

PARTIE C

Dans cette partie, p désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On désigne par Ω l'ensemble des éléments de E dont les coefficients sont des entiers de l'intervalle $\llbracket 1, p \rrbracket$, par \mathcal{A} l'ensemble des parties de Ω et par \mathbf{P} la probabilité uniforme sur \mathcal{A} , c'est à dire que, pour tout polynôme Q de Ω , l'on a : $\mathbf{P}(\{Q\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$.

Si Q est un élément de Ω et i un entier naturel non nul, on dit que Q et $s(Q)$ présentent i coïncidences lorsqu'il existe exactement i entiers k qui vérifient $a_k = a_{2n-k}$.

On définit alors la variable aléatoire Z qui, à tout polynôme Q de Ω , associe le nombre de coïncidences entre Q et $s(Q)$.

Par exemple pour $n = 2$, si $Q(x) = x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 5x + 1$, on a $Z(Q) = 3$.

1. Description d'un cas simple

Dans cette question, on suppose que n est égal à 1 et que p est égal à 2.

Ecrire tous les éléments de Ω puis déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z .

2. Étude générale de la variable aléatoire Z

On revient au cas général : n est strictement positif et p est supérieur ou égal à 2.

a) Calculer le cardinal de Ω .

b) Montrer que la plus petite valeur que peut prendre Z est 1 et justifier l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}([Z = 1]) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$$

c) Montrer que la plus grande valeur que peut prendre Z est $2n + 1$ et justifier l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}([Z = 2n + 1]) = \frac{1}{p^n}$$

d) Montrer que Z ne peut prendre que des valeurs impaires et, pour un entier j vérifiant $0 \leq j \leq n$, calculer $\mathbf{P}([Z = 2j + 1])$.

e) On pose $Y = \frac{Z-1}{2}$. Montrer que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire l'espérance et la variance de Z en fonction de n et de p .



ANNALES DE MATHEMATIQUES 2004

HEC 2004 VOIE E

CORRIGE

EXERCICE

1-a) _____

Sur $[0; 1]$, $x \mapsto \frac{x^{n-1}}{1+x}$ est continue, ce qui prouve au passage que c_n existe.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, c_{n+1} - c_n &= \int_0^1 \frac{x^n - x^{n-1}}{1+x} dx \quad \text{par linéarité de l'intégration} \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x} dx \end{aligned}$$

Sur $[0; 1]$, $x \mapsto \frac{x^{n-1}}{1+x}$ est positive ; les bornes sont dans l'ordre croissant, donc $c_n \geq 0$

Sur $[0; 1]$, $x-1 \leq 0$ donc $\frac{x^{n-1}}{1+x}(x-1) \leq 0$. Les bornes sont dans l'ordre croissant, donc

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x} dx = c_{n+1} - c_n \leq 0$$

La suite $(c_n)_{n \geq 1}$ est décroissante

1-b) _____

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, c_{n+1} + c_n &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{1+x} dx \quad \text{par linéarité de l'intégration} \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+1)}{1+x} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx \\ &= \frac{1}{n} [x^n]_0^1 \end{aligned}$$

$$\forall n \geq 1, c_{n+1} + c_n = \frac{1}{n}$$

1-c) _____

La suite (c_n) étant décroissante, $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{n} = c_{n+1} + c_n \leq 2c_n$ puisque $c_{n+1} \leq c_n$

$\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n-1} = c_n + c_{n-1} \geq 2c_n$ puisque $c_{n-1} \geq c_n$

Il en résulte que $\forall n \geq 2$, on a $\frac{1}{n} \leq 2c_n \leq \frac{1}{n-1}$

Divisons les trois termes de cet encadrement par $\frac{1}{n} > 0$, il vient

$1 \leq \frac{2c_n}{\frac{1}{n}} \leq \frac{n}{n-1}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n-1} = 1$, donc **d'après le théorème d'encadrement**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2c_n}{\frac{1}{n}} = 1$, ce qui prouve que $2c_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ ou encore

$$c_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

1-d)

$$c_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \boxed{\ln 2}$$

Raisonnons par récurrence

• **Initialisation** : Pour $n = 2$ $c_2 = 1 - c_1$ (d'après le 1-b) et

$$(-1)^2 \left(\sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right) = 1 - \ln 2 :$$

La formule est valable pour $n = 2$.

• **Hérédité** : supposons la formule vraie pour un entier $n \geq 2$: c'est-à-dire

$$c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right) . \text{ D'après le 1-b)}$$

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{1}{n} - c_n \\ &= \frac{1}{n} - (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right) \\ &= \frac{1}{n} + (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right) \\ &= (-1)^{n+1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right) \\ &\quad \text{car } (-1)^{n+1} (-1)^{n+1} = (-1)^{2n+2} = 1 \\ c_{n+1} &= (-1)^{n+1} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right) \\ &= (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right) \end{aligned}$$

La formule obtenue est bien la relation étudiée, au rang $n + 1$: cette relation est héréditaire et d'après le principe du raisonnement par récurrence :

$$\forall n \geq 2, c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right)$$

1-e)

Program hec2004 ;

var c : real ; n,k : integer ;

Begin

writeln(' entrez un entier n supérieur ou égal à 1');

write('n= '); readln(n) ;

c:= ln(2) ;

for k:= 1 to n-1 do

c:= 1/k-c ;

writeln(' c(', n, ')= ', c :1:3) ;

End .

2-a)

Posons $t = \frac{1}{u}$; $dt = -\frac{1}{u^2} du$ (la fonction $u \mapsto \frac{1}{u}$ est de classe C^1 sur $[0; x]$)

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} &= \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{u^n}{1+\frac{1}{u}} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du \\ &= \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^n}{1+u} \frac{1}{u^2} du \\ &= \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^n}{u(1+u)} du \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du}$$

2-b)

Remarquons que , d'après 1- c , $c_n > 0$ puisque $\frac{1}{2n} \leq c_n$; ceci prouve que $\frac{1}{c_n t^n(1+t)}$ existe . De plus, pour $t \geq 1$, $\frac{1}{c_n t^n(1+t)} > 0$, donc

$$\forall t \geq 1, f_n(t) \geq 0 \quad (1)$$

L'application $t \mapsto \frac{1}{c_n t^n(1+t)}$ est continue sur $[1; +\infty[$ (fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) et $t \mapsto 0$ est continue sur $] -\infty; 1[$ donc

$$f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R} - \{1\} \quad (2)$$

On remarque que f_n est continue en 1 à droite : $\lim_{t \rightarrow 1^+} f_n(t) = \frac{1}{2c_n} = f_n(1)$ mais elle n'est pas continue en 1 à gauche car $\lim_{t \rightarrow 1^-} f_n(t) = 0 \neq f_n(1)$ puisque $c_n > 0$.

D'autre part , $\forall x \geq 1$, $\int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du$

L'application $g_n : u \mapsto \frac{u^{n-1}}{1+u}$ est continue sur $[0; 1]$, donc sur $[\frac{1}{x}; 1] \subset [0; 1]$; elle y admet des primitives. Soit G_n l'une d'entre elles

$$\forall x \geq 1, \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du = G_n(1) - G_n\left(\frac{1}{x}\right).$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} G_n\left(\frac{1}{x}\right) = G_n(0)$ car G_n est continue en 0 et $\frac{1}{x} \rightarrow 0$. Donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du &= G_n(1) - G_n(0) \\ &= \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du = c_n \end{aligned}$$

On a $\int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du$, donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du \\ &= \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+u} du = c_n \end{aligned}$$

Par suite $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_1^{+\infty} f_n(t) dt$ puisque $f_n(t) = 0$ pour $t < 1$, donc