EXERCICE

1. Étude d'une suite et programmation

On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie pour tout entier n strictement positif par :

$$c_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

a) Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

b) Montrer que, pour tout entier n strictement positif, l'on a : $c_{n+1}+c_n = \dfrac{1}{n}\cdot$

c) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité : $\dfrac{1}{n} \leqslant 2c_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}\cdot$
En déduire un équivalent simple de c_n quand n tend vers l'infini.

d) Calculer c_1 et prouver, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$c_n = (-1)^n\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\right)$$

e) Écrire un programme en Turbo-Pascal qui, pour une valeur d'un entier n strictement positif entrée par l'utilisateur, calcule et affiche la valeur de c_n.

2. Étude d'une suite de variables aléatoires à densité

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<1 \\ \dfrac{1}{c_n\, t^n(1+t)} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

a) À l'aide d'un changement de variable, établir pour tout entier n strictement positif et pour tout réel x supérieur ou égal à 1, l'égalité : $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u\cdot$

b) En déduire que, pour tout entier n strictement positif, f_n est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, telle que, pour tout entier n strictement positif, X_n prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$ et admet f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n.

c) Pour quelles valeurs de n la variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ? Dans le cas où l'espérance de X_n existe, calculer cette espérance en fonction de c_n et de c_{n-1}.

d) Dans cette question, exclusivement, on suppose que n est égal à 1. Préciser la fonction F_1.
En déduire l'ensemble des réels y vérifiant $\mathbf{P}([X_1 \leqslant y]) \geqslant \dfrac{1}{2}$ ·
Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z = \ln(X_1)$.

e) Soit x un réel strictement supérieur à 1.
Justifier l'encadrement : $0 \leqslant \displaystyle\int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{n+1}$ ·
En déduire la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} du \right)$.

Transformer, pour tout entier naturel n non nul, $F_n(x)$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire l'égalité suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$.

f) Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(x)$ si x est un réel inférieur ou égal à 1 ? Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable que l'on précisera.

PROBLÈME

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n$.
Pour tout entier naturel non nul k, on note X^k le polynôme $x \mapsto x^k$ et on rappelle que la famille $(1, X, \ldots, X^{2n})$ est une base de E.

Si $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ sont $2n+1$ réels et Q est le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$,
on définit le polynôme $s(Q)$ par : $s(Q)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} x^k$.

Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en « inversant l'ordre des coefficients ».
Par exemple, si n est égal à 2 et si $Q(x) = 4x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 1$, on obtient $s(Q)(x) = x^4 + 2x^2 + 7x + 4$.

Les trois parties de ce problème sont largement indépendantes.

PARTIE A

1. Linéarité de s

Montrer que l'application $s : Q \mapsto s(Q)$ est une application linéaire de E dans lui-même.

2. Diagonalisation dans un cas particulier

a) On considère la matrice carrée d'ordre 3 : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Justifier sans calcul que la matrice M est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres de M et, pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

b) Vérifier que, dans le cas particulier $n = 1$, M est la matrice de l'application linéaire s dans la base $(1, X, X^2)$. Donner alors une base de vecteurs propres pour s.

3. Etude du cas général

On définit la famille de polynômes $(A_0, ..., A_{2n})$ par :

$$\text{pour tout réel } x, \quad \begin{cases} A_k(x) = x^{2n-k} + x^k & \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ A_n(x) = x^n \\ A_k(x) = x^k - x^{2n-k} & \text{si} \quad n+1 \leqslant k \leqslant 2n \end{cases}$$

a) Déterminer l'endomorphisme $s \circ s$.

b) Soit P un polynôme non nul et λ un réel vérifiant $s(P) = \lambda P$.
Calculer $s \circ s(P)$ et en déduire que les valeurs propres de s appartiennent à $\{1, -1\}$.

c) Déterminer $s(A_k)$ pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 2n$.

d) Montrer que la famille $(A_0, ..., A_{2n})$ est libre.

e) En déduire que l'endomorphisme s est diagonalisable, préciser ses valeurs propres et la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

PARTIE B

1. Préliminaires

On définit une suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes par :
pour tout réel x, $\quad R_1(x) = x, \quad R_2(x) = x^2 - 2$
et pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $\;R_{k+1}(x) = xR_k(x) - R_{k-1}(x)$

a) Déterminer les polynômes R_3 et R_4.

b) Montrer que, pour tout entier k strictement positif, R_k est un polynôme de degré k vérifiant pour tout réel x non nul, l'égalité : $\quad R_k\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^k + \dfrac{1}{x^k}\cdot$

c) Pour tout réel a, déterminer, s'ils existent, les réels x non nuls qui vérifient la relation suivante : $x + \dfrac{1}{x} = a$.

2. Étude des racines des polynômes vecteurs propres de s associés à la valeur propre 1

Dans cette question, Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini par : $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$, tel que a_{2n} soit non nul et tel que, pour tout entier k de l'intervalle $[\![0, n]\!]$, l'on ait : $a_k = a_{2n-k}$.

On définit alors le polynôme $\widetilde{Q}$ par : $\quad \widetilde{Q}(x) = a_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{n-k} R_k(x)$.

a) Vérifier que 0 n'est pas racine de Q.

b) Soit x un réel non nul, on pose : $y = x + \dfrac{1}{x}\cdot$

Montrer que $\dfrac{Q(x)}{x^n}$ est nul si et seulement si $\widetilde{Q}(y)$ est nul.

Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de Q ?

c) On suppose que n est égal à 3 et que Q est défini par :
$Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1$.
Déterminer les racines de Q.

PARTIE C

Dans cette partie, p désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par Ω l'ensemble des éléments de E dont les coefficients sont des entiers de l'intervalle $[\![1, p]\!]$, par $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω et par $\mathbf{P}$ la probabilité uniforme sur $\mathcal{A}$, c'est à dire que, pour tout polynôme Q de Ω, l'on a : $\mathbf{P}(\{Q\}) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$ ·
Si Q est un élément de Ω et i un entier naturel non nul, on dit que Q et $s(Q)$ présentent i coïncidences lorsqu'il existe exactement i entiers k qui vérifient $a_k = a_{2n-k}$.
On définit alors la variable aléatoire Z qui, à tout polynôme Q de Ω, associe le nombre de coïncidences entre Q et $s(Q)$.
Par exemple pour $n = 2$, si $Q(x) = x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 5x + 1$, on a $Z(Q) = 3$.

1. **Description d'un cas simple**

   Dans cette question, on suppose que n est égal à 1 et que p est égal à 2.
   Ecrire tous les éléments de Ω puis déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z.

2. **Étude générale de la variable aléatoire Z**

   On revient au cas général : n est strictement positif et p est supérieur ou égal à 2.

   a) Calculer le cardinal de Ω.

   b) Montrer que la plus petite valeur que peut prendre Z est 1 et justifier l'égalité suivante :
   $$\mathbf{P}([Z = 1]) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$$

   c) Montrer que la plus grande valeur que peut prendre Z est $2n + 1$ et justifier l'égalité suivante :
   $$\mathbf{P}([Z = 2n + 1]) = \frac{1}{p^n}$$

   d) Montrer que Z ne peut prendre que des valeurs impaires et, pour un entier j vérifiant $0 \leqslant j \leqslant n$, calculer $\mathbf{P}([Z = 2j + 1])$.

   e) On pose $Y = \dfrac{Z-1}{2}$ · Montrer que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   En déduire l'espérance et la variance de Z en fonction de n et de p.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2004

HEC 2004 VOIE E

CORRIGE

EXERCICE

1–a)

Sur $[0;1]$, $x \mapsto \dfrac{x^{n-1}}{1+x}$ est continue , ce qui prouve au passage que c_n existe.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_{n+1} - c_n &= \int_0^1 \frac{x^n - x^{n-1}}{1+x}dx \quad \text{par linéarité de l'intégration}\\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x}dx\end{aligned}$$

Sur $[0;1]$, $x \mapsto \dfrac{x^{n-1}}{1+x}$ est positive ; les bornes sont dans l'ordre croissant , donc $\boxed{c_n \geq 0}$

Sur $[0;1]$, $x-1 \leq 0$ donc $\dfrac{x^{n-1}}{1+x}(x-1) \leq 0$. Les bornes sont dans l'ordre croissant, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x}dx = c_{n+1} - c_n \leq 0$

$$\boxed{\text{La suite } (c_n)_{n\geq 1} \text{ est décroissante}}$$

1–b)

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_{n+1} + c_n &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{1+x}dx \quad \text{par linéarité de l'intégration}\\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+1)}{1+x}dx = \int_0^1 x^{n-1}dx\\ &= \frac{1}{n}\Big[x^n\Big]_0^1\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geq 1, c_{n+1} + c_n = \frac{1}{n}}$$

1–c)

La suite (c_n) étant décroissante, $\forall n \geq 1,\ \dfrac{1}{n} = c_{n+1} + c_n \leq 2c_n$ puisque $c_{n+1} \leq c_n$

$\forall n \geq 2,\ \dfrac{1}{n-1} = c_n + c_{n-1} \geq 2c_n$ puisque $c_{n-1} \geq c_n$

Il en résulte que $\boxed{\forall n \geq 2, \text{ on a } \dfrac{1}{n} \leq 2c_n \leq \dfrac{1}{n-1}}$

Divisons les trois termes de cet encadrement par $\dfrac{1}{n} > 0$, il vient

$1 \leq \dfrac{2c_n}{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{n}{n-1}$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = 1$, donc **d'après le théorème d'encadrement** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2c_n}{\frac{1}{n}} = 1$, ce qui prouve que $2c_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ ou encore

$$\boxed{c_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}}$$

1–d)

$c_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \boxed{\ln 2}$

Raisonnons par récurrence

- **Initialisation :** Pour $n = 2$ $c_2 = 1 - c_1$ (d'après le **1–b)** et

$(-1)^2\Big(\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\Big) = 1 - \ln 2$:

La formule est valable pour $n = 2$.

- **Hérédité :** supposons la formule vraie pour un entier $n \geq 2$: c'est-à-dire

$c_n = (-1)^n\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\Big)$. D'après le **1–b)**

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= \frac{1}{n} - c_n \\
&= \frac{1}{n} - (-1)^n\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\Big) \\
&= \frac{1}{n} + (-1)^{n+1}\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\Big) \\
&= (-1)^{n+1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} + (-1)^{n+1}\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\Big) \\
&\quad \text{car } (-1)^{n+1}(-1)^{n+1} = (-1)^{2n+2} = 1 \\
c_{n+1} &= (-1)^{n+1}\Big(\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\Big) \\
&= (-1)^{n+1}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\Big)
\end{aligned}$$

La formule obtenue est bien la relation étudiée, au rang $n + 1$: cette relation est héréditaire et d'après le principe du raisonnement par récurrence :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ c_n = (-1)^n\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\Big)}$$

1–e)

```
Program hec2004 ;
var c : real ; n,k : integer ;
Begin
writeln(' entrez un entier n supérieur ou égal à 1');
write('n= ') ; readln(n) ;
c:= ln(2) ;
for k:= 1 to n-1 do
c:= 1/k-c ;
writeln( ' c(', n, ')= ' , c :1:3) ;
End .
```

2–a)

Posons $t = \frac{1}{u}$; $dt = -\frac{1}{u^2}du$ (la fonction $u \mapsto \frac{1}{u}$ est de classe C^1 sur $]0; x]$)

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} &= \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{u^n}{1+\frac{1}{u}}(-\frac{1}{u^2})du \\ &= \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^n}{\frac{1+u}{u}} \frac{1}{u^2}du \\ &= \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^n}{u(1+u)}du\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}du}$$

2–b)

Remarquons que , d'après **1– c** , $c_n > 0$ puisque $\frac{1}{2n} \leq c_n$; ceci prouve que $\frac{1}{c_n t^n(1+t)}$ existe . De plus, pour $t \geq 1$, $\frac{1}{c_n t^n(1+t)} > 0$, donc

$$\forall t \geq 1,\ f_n(t) \geq 0 \qquad \textbf{(1)}$$

L'application $t \mapsto \frac{1}{c_n t^n(1+t)}$ est continue sur $[1; +\infty[$ (fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) et $t \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty; 1[$ donc

$$f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R} - \{1\} \qquad \textbf{(2)}$$

On remarque que f_n est continue en 1 à droite : $\lim_{t\to 1^+} f_n(t) = \frac{1}{2c_n} = f_n(1)$ mais elle n'est pas continue en 1 à gauche car $\lim_{t\to 1^-} f_n(t) = 0 \neq f_n(1)$ puisque $c_n > 0$.

D'autre part , $\forall x \geq 1$, $\int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}du$

L'application $g_n\ :\ u \mapsto \frac{u^{n-1}}{1+u}$ est continue sur $[0; 1]$, donc sur $[\frac{1}{x}; 1] \subset [0; 1]$; elle y admet des primitives. Soit G_n l'une d'entre elles

$\forall x \geq 1$, $\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}du = G_n(1) - G_n(\frac{1}{x})$.

$\lim_{x\to+\infty} G_n(\frac{1}{x}) = G_n(0)$ car G_n est continue en 0 et $\frac{1}{x} \to 0$. Donc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}du &= G_n(1) - G_n(0) \\ &= \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}du = c_n\end{aligned}$$

On a $\int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}du$, donc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} &= \lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}du \\ &= \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}du = c_n\end{aligned}$$

Par suite $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = \int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ puisque $f_n(t) = 0$ pour $t < 1$, donc