BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :
283
CCIP_M2_S

Concepteur : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 7 mai 2008, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X quelconque. Pour toute variable aléatoire réelle X admettant une densité sur $\mathbb{R}$, notée f_X, on note $\mathcal{D}_X$ l'ensemble des réels s pour lesquels la variable aléatoire e^{sX} admet une espérance, et on note Φ_X la fonction définie sur $\mathcal{D}_X$ par : $\Phi_X(s) = E(e^{sX})$.

On **admet** les résultats suivants :

- si deux variables aléatoires X et Y sont telles que Φ_X et Φ_Y coïncident sur un intervalle ouvert non vide, alors X et Y ont la même loi ;
- si n est un entier naturel non nul, et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles quelconques, mutuellement indépendantes, alors, pour tout entier p de $[\![1, n-1]\!]$ et pour toutes fonctions réelles continues φ_1 et φ_2, les variables aléatoires $\varphi_1(X_1, \ldots, X_p)$ et $\varphi_2(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes ;
- si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors XY admet une espérance, et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

La fonction exponentielle est également notée exp. On rappelle que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}$.

Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Préliminaire

On rappelle que, pour tout s de $\mathcal{D}_X$, on a : $\Phi_X(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sx) f_X(x) dx$.

1. Soit a un réel non nul et b un réel quelconque.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx$ est convergente si et seulement si $a > 0$, et vaut alors $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$.

b) En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2+bx)dx$ est convergente si et seulement si $a>0$, puis montrer que dans ces conditions, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2+bx)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$.

2. a) Déterminer $\mathcal{D}_U$; pour tout s de $\mathcal{D}_U$, calculer $\Phi_U(s)$.

b) On pose : $Z=U^2$. Établir que : $\mathcal{D}_Z =]-\infty, \frac{1}{2}[$; montrer, à l'aide du théorème de transfert, que pour tout réel s de $\mathcal{D}_Z$, on a : $\Phi_Z(s) = (1-2s)^{-1/2}$.

3. Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et soit μ et β deux réels quelconques.

a) Montrer qu'un réel s appartient à $\mathcal{D}_{\mu X+\beta}$ si et seulement si μs appartient à $\mathcal{D}_X$, et que dans ce cas, on a : $\Phi_{\mu X+\beta}(s) = \exp(\beta s)\Phi_X(\mu s)$.

b) On suppose que X suit une loi γ de paramètre ν, où ν est un réel strictement positif.
Montrer que : $\mathcal{D}_X =]-\infty, 1[$; pour tout s de $\mathcal{D}_X$, établir la formule : $\Phi_X(s) = (1-s)^{-\nu}$. De même, déterminer $\mathcal{D}_{2X}$; pour tout s de $\mathcal{D}_{2X}$, calculer $\Phi_{2X}(s)$.

Partie I. Loi du χ^2 centré

Soit r un entier supérieur ou égal à 1. On considère une variable aléatoire X_r suivant la loi Γ de paramètres $\left(2, \frac{r}{2}\right)$, c'est-à-dire que X_r possède une densité f_{X_r} donnée par :

$$f_{X_r}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{r}{2}} \times \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \times x^{\frac{r}{2}-1} \times \exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

On dit que X_r suit une loi du χ^2 (« chi deux ») centré à r degrés de liberté, et on note : $X_r \hookrightarrow \chi^2(r)$.

1. Étudier les variations de f_{X_4} et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

2. a) Montrer que la variable aléatoire $\frac{X_r}{2}$ suit une loi γ de paramètre $\frac{r}{2}$. En déduire $E(X_r)$ et $V(X_r)$.

b) Déterminer $\mathcal{D}_{X_r}$; pour tout s de $\mathcal{D}_{X_r}$, calculer $\Phi_{X_r}(s)$.

3. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires indépendantes $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de même loi que U. Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on pose : $Z_i = U_i^2$.

a) Vérifier que X_1 et U^2 sont de même loi.

b) On pose : $W_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$. Quelle est la loi de probabilité de W_n ?

c) Déterminer $\mathcal{D}_{W_n}$, et pour tout s de $\mathcal{D}_{W_n}$, exprimer $\Phi_{W_n}(s)$ en fonction de s et de n. Établir une relation entre $\Phi_{W_n}(s)$ et $\Phi_{Z_1}(s), \Phi_{Z_2}(s), \ldots, \Phi_{Z_n}(s)$.

4. Soit T une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, de variance σ^2 inconnue, σ étant un réel strictement positif. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on dispose d'un n-échantillon indépendant, identiquement distribué (i.i.d.), $T_1, T_2, \ldots, T_n$ de la loi de T. On considère la variable aléatoire S_n définie par : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^2$.

a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais et convergent du paramètre σ^2.

b) Soit α un réel vérifiant : $0<\alpha<1$, et soit k_α le réel strictement positif tel que : $P([W_n \geqslant k_\alpha]) = 1-\alpha$.
Montrer que l'intervalle $\left]0, \frac{nS_n}{k_\alpha}\right]$ est un intervalle de confiance de σ^2 au risque α.

Partie II. Loi du χ^2 décentré

On considère une suite $(M_j)_{j\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, telles que pour tout j de $\mathbb{N}^*$, M_j suive la loi normale d'espérance m_j ($m_j \in \mathbb{R}$) et de variance égale à 1.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on pose : $Y_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_j^2$ et $\lambda_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j^2$.

On dit que Y_n suit une loi du χ^2 décentré à n degrés de liberté, de paramètre de décentrage λ_n, et on note : $Y_n \hookrightarrow \chi^2(n, \lambda_n)$.

1. Dans cette question *uniquement*, on suppose que l'entier n est égal à 1.

a) Montrer les deux égalités suivantes : $E(U^3) = 0$ et $E(U^4) = 3$.

b) En déduire, en fonction de λ_1, les valeurs respectives de $E(Y_1)$ et de $V(Y_1)$.

c) Montrer que : $\mathcal{D}_{Y_1} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et établir, pour tout réel s de $\mathcal{D}_{Y_1}$, la formule suivante :

$$\Phi_{Y_1}(s) = (1-2s)^{-1/2} \times \exp\left(\frac{s\lambda_1}{1-2s}\right)$$

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

a) Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$ en fonction de n et λ_n.

b) On admet que l'on a : $\mathcal{D}_{Y_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$. Pour tout s de $\mathcal{D}_{Y_n}$, exprimer $\Phi_{Y_n}(s)$ en fonction de s, n et λ_n.

Partie III. Nombre aléatoire de degrés de liberté

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une espérance $E(X)$, et une variable aléatoire K à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note N_K l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $P([K=k]) > 0$, et on suppose que pour tout entier k de N_K, la variable aléatoire X admet une espérance pour la probabilité conditionnelle $P_{[K=k]}$, notée $E(X/K=k)$.

On admet alors l'égalité suivante : $(\star)$ $E(X) = \displaystyle\sum_{k\in N_K} E(X/K=k)P([K=k])$

Soit g l'application définie sur $\mathbb{N}$ par : $g(k) = \begin{cases} E(X/K=k) & \text{si } k \in N_K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. *Vérification de la formule $(\star)$ sur un exemple.*

Soit $(J_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose : $X_k = \displaystyle\sup_{1\leqslant i\leqslant k}(J_i)$; autrement dit, pour tout ω de Ω, $X_k(\omega) = \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant k} J_i(\omega)$. Soit K une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme discrète sur $[\![1,n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On suppose que K est indépendante des variables aléatoires de la suite $(J_i)_{i\geqslant 1}$.

Pour tout ω de Ω, on pose : $X(\omega) = \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant K(\omega)} J_i(\omega)$, et on admet que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Établir, pour tout entier k de $[\![1,n]\!]$ et pour tout réel x, la relation : $P_{[K=k]}([X \leqslant x]) = P([X_k \leqslant x])$.

b) Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

c) En déduire que X est une variable aléatoire à densité, qui admet une espérance $E(X)$ que l'on exprimera en fonction de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$.

d) Vérifier l'égalité $(\star)$: $E(X) = E(g(K))$.

2. Soit $(U_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi normale centrée réduite. Soit K une variable aléatoire indépendante des variables aléatoires de la suite $(U_i)_{i\geqslant 1}$, qui suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{2}$ strictement positif.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_{n+2K}^2$. On admet que H_n est une variable aléatoire à densité à valeurs positives, et que $\mathcal{D}_{H_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$.

Soit s un réel de $]-\infty, \frac{1}{2}[$.

a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de H_n sachant $[K = k]$ est la loi de la variable aléatoire W_{n+2k} définie dans la question I.3.b.

b) En posant : $X = e^{sH_n}$, déterminer, pour tout entier k de $\mathbb{N}$, l'expression de $g(k)$ en fonction de k.

c) Établir la formule suivante :

$$E(g(K)) = (1-2s)^{-n/2} \times \exp\left(\frac{\lambda s}{1-2s}\right)$$

d) En utilisant l'égalité $(\star)$, admise au début de cette partie, avec $X = e^{sH_n}$, déterminer la loi de H_n.

e) À l'aide de la question III.2.a, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :

$$E\left(\frac{1}{H_n}\right) = E\left(\frac{1}{n-2+2K}\right)$$

Partie IV. Estimateur de James-Stein

Soit p un entier supérieur ou égal à 3. On suppose qu'un modèle aléatoire défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ comporte p paramètres réels inconnus $\theta_1, \ldots, \theta_p$ non tous nuls. Un échantillon d'observations statistiques permet d'exhiber des estimateurs $\widehat{\theta_1}, \ldots, \widehat{\theta_p}$ *sans biais* des paramètres $\theta_1, \ldots, \theta_p$ respectivement. On suppose que les variables aléatoires $\widehat{\theta_1}, \ldots, \widehat{\theta_p}$ sont indépendantes et suivent une loi normale de variance égale à 1.

On pose : $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$, $\widehat{\theta} = (\widehat{\theta_1}, \ldots, \widehat{\theta_p})$, $B_p = \sum_{j=1}^{p} \widehat{\theta_j}^2$ et $b_p = \sum_{j=1}^{p} \theta_j{}^2$.

On dit que *le vecteur aléatoire $\widehat{\theta}$ est un estimateur sans biais du paramètre vectoriel θ*, et $E(\widehat{\theta})$ est alors le vecteur θ.

On définit le *risque quadratique scalaire* d'un estimateur θ^* de θ, noté $R(\theta^*, \theta)$, par :

$$R(\theta^*, \theta) = E\Big(\sum_{j=1}^{p} (\theta_j^* - \theta_j)^2\Big)$$

Dans cette partie, on cherche un estimateur θ^* de θ, représenté par un vecteur aléatoire $(\theta_1^*, \ldots, \theta_p^*)$, dont le risque $R(\theta^*, \theta)$ est strictement inférieur à $R(\widehat{\theta}, \theta)$.

1. Justifier que la variable aléatoire B_p suit la loi $\chi^2(p, b_p)$, et qu'elle constitue un estimateur biaisé de b_p.

2. On pose : $\theta^* = \left(1 - \frac{c}{B_p}\right) \times \widehat{\theta}$, où c est un paramètre réel strictement positif. Soit K une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{b_p}{2}$.

a) En admettant que l'on a : $E\Big(\frac{1}{B_p} \sum_{j=1}^{p} \theta_j \, \widehat{\theta_j}\Big) = E\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right)$, établir l'égalité suivante :

$$R(\theta^*, \theta) - R(\widehat{\theta}, \theta) = (c^2 - 2c(p-2)) \times E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)$$

b) Montrer que l'inégalité : $R(\theta^*, \theta) < R(\widehat{\theta}, \theta)$, est vérifiée si et seulement si : $0 < c < 2(p-2)$.
Déterminer en fonction de p, la valeur de c pour laquelle $R(\theta^*, \theta) - R(\widehat{\theta}, \theta)$ est minimale.
Comment s'écrit alors l'estimateur θ^* ?

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2008

HEC MATH II 2008 VOIE S

CORRIGE

PRELIMINAIRES

Rappel : une densité de la loi $\Gamma(\frac{1}{b},\nu)$ est $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<0\\ \dfrac{b^\nu x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\exp(-bx) & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$

1−a)

Notons φ_a la fonction $x\mapsto \exp(-ax^2)$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car $x\mapsto -ax^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et l'exponentielle aussi. L'intégrale $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_a(x)dx$ est impropre uniquement en $-\infty$ et $+\infty$. De plus la fonction φ_a est paire, donc I converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi_a(x)dx$ converge.

- **Convergence :**

∗ **Cas où** $a>0$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\exp(-ax^2)=0$, donc $\varphi_a(x)\underset{(+\infty)}{=}\circ\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}dx$ converge (critère de Riemann, $2>1$), donc par négligeabilité des fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi_a(x)dx$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi_a(x)dx$ converge.

∗ **Cas où** $a\leq 0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\varphi_a(x)=+\infty$. Il existe $A>0$ tel que $\forall x\geq A,\ \varphi_a(x)\geq\frac{1}{x}>0$. Par minoration des fonctions continues positives, $\displaystyle\int_A^{+\infty}\varphi_a(x)dx$ diverge car $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{dx}{x}$ diverge.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ax^2)dx \text{ converge si et seulement si } a>0}$$

- **Calcul de l'intégrale quand** $a>0$ **:**

$-ax^2=-\dfrac{x^2}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)^2}$. Soit une variable T qui suit la loi normale de paramètres $(0,\frac{1}{2a})$.

Une densité de T est f_T définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_T(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2a}}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\frac{1}{2a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{a}}}\exp(-ax^2)$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_T(x)dx=1\iff\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{a}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ax^2)dx=1$, donc

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

1–b)

C'est la même démonstration que dans la question précédente :

Pour $a > 0$ on a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 \exp(-ax^2 + bx) = 0$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx)dx$ converge

Pour $a < 0$, on a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x \exp(-ax^2 + bx) = +\infty$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx)dx$ diverge

Pour $a = 0$: $\int_{-\infty}^{0} \exp(bx)dx$ diverge si $b \leq 0$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(bx)dx$ aussi et

$\int_{0}^{\infty} \exp(bx)dx$ diverge si $b > 0$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(bx)dx$ aussi

Conclusion : l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx)dx$ **converge si et seulement si** $a > 0$

Calcul de l'intégrale quand $a > 0$ **:**

On a : $-ax^2 + bx = -a(x^2 - \frac{b}{a}x) = -a(x - \frac{b}{2a})^2 + \frac{b^2}{4a}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx)dx = \exp(\frac{b^2}{4a}) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-a(x - \frac{b}{2a})^2)dx.$$

Effectuons le changement de variable affine $u = x - \frac{b}{2a}$; $du = dx$; les bornes sont conservées et il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-a(x - \frac{b}{2a})^2)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-au^2)du$$

$$\boxed{\text{D'après le résultat du 1–a), } \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx) = \exp(\frac{b^2}{4a})\sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

2–a)

$$\begin{aligned} D_U &= \{s \in \mathbb{R} \ / \ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sx)\exp(-\frac{x^2}{2})dx \quad \text{converge}\} \\ &= \{s \in \mathbb{R} \ / \ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2} + sx)dx \quad \text{converge }\} \end{aligned}$$

d'après le 1–b) , $\boxed{D_U = \mathbb{R}}$

$$\boxed{\Phi_U(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sx)\exp(-\frac{x^2}{2})dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}\exp(\frac{s^2}{4 \times \frac{1}{2}}) = \exp(\frac{s^2}{2})}$$

2–b)

Déterminons la loi de$Z$. On a déjà $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Notons F_Z la fonction de répartition de Z et F_U celle de U.

$$\begin{aligned} \forall t \leq 0,\ F_Z(t) &= 0 \\ \forall t \geq 0,\ F_Z(t) &= P(U^2 \leq t) \\ &= P(-\sqrt{t} \leq U \leq \sqrt{t}) \\ &= F_U(\sqrt{t}) - F_U(-\sqrt{t}) \\ &= F_U(\sqrt{t}) - (1 - F_U(\sqrt{t})) \ \text{(propriété de la loi normale centrée réduite)} \\ &= 2F_U(\sqrt{t}) - 1 \end{aligned}$$

Si l'on note f_Z une densité de Z, on pourra prendre

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{2}{2\sqrt{t}} f_U(\sqrt{t}) & \text{si } t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{t}{2}) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Sous réserve de convergence, $\Phi_Z(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(st) f_Z(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2} - s)t)dt$

L'intégrale est impropre en 0 et $+\infty$, puisque sur $]0, +\infty[$ la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2} - s)t)$ est continue.

$*$ **En** 0, $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2} - s)t) \underset{(0)}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. On sait que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge d'après le critère de Riemann puisque $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ et $\frac{1}{2} < 1$. Par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2} - s)t)dt$ converge.

$*$ **En** $+\infty$**.**

Si $\frac{1}{2} - s \leq 0$, alors $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2} - s)t) \geq \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ car $-(\frac{1}{2} - s)t \geq 0$, donc $\exp(-(\frac{1}{2} - s)t) \geq 1$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ diverge, donc par minoration des fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2} - s)t)dt$ diverge aussi.

Si $\frac{1}{2} - s > 0$, alors $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2} - s)t) = 0$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2} - s)t) \underset{(+\infty)}{=} \circ\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge d'après le critère de Riemann $(2 > 1)$, on en déduit, par négligeabilité des fonctions continues positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2} - s)t)dt$ est convergente

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2} - s)t)dt$ converge si et seulement si $\frac{1}{2} - s > 0$, soit $s \in] - \infty; \frac{1}{2}[$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(\tfrac{1}{2} - s)t)dt \text{ converge si et seulement si } s \in] - \infty; \tfrac{1}{2}[\ : D_Z =] - \infty; \tfrac{1}{2}[}$$

- **Calcul de** $\Phi_Z(s)$ **pour** $s < \frac{1}{2}$.

$$\Phi_Z(s) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(\frac{1}{2} - s)t)dt$$

Soit $0 < a < b$ et $I(a, b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(\frac{1}{2} - s)t)dt$. Posons $t = u^2$, donc $u = \sqrt{t}$ et $du = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$\begin{aligned}
I(a, b) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \exp(-(\frac{1}{2} - s)u^2)du \\
\Phi_Z(s) &= \lim_{\substack{a \to 0 \\ b \to +\infty}} I(a, b) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-(\frac{1}{2} - s)u^2)du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(\frac{1}{2} - s)u^2)du \quad \text{car la fonction que l'on intègre est paire}
\end{aligned}$$