BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2010

Conceptions : H.E.C. – E.S.C.P. / EUROPE **280**

OPTION SCIENTIFIQUE **HEC__MATS**

MATHEMATIQUES

Mardi 4 mai 2010, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, et $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Le produit scalaire et la norme associée sont notés respectivement $\langle\ ,\ \rangle$ et $||\ ||$. Pour tous vecteurs $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on note $x \geqslant y$ si pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $x_i \geqslant y_i$.
Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est noté $\overrightarrow{0}$ et le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1 est noté $\overrightarrow{1}$.

On rappelle ou on admet les deux résultats suivants :

- une partie K non vide de $\mathbb{R}^n$ est *convexe* si pour tout couple (u, v) de vecteurs de K^2 et pour tout réel t de $[0, 1]$, le vecteur $tu + (1-t)v$ appartient à K ;
- l'image réciproque par une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

On dit qu'un vecteur h de $\mathbb{R}^n$ *sépare* deux convexes K_1 et K_2, s'il existe un réel c qui vérifie, pour tous vecteurs u de K_1 et v de K_2, l'encadrement : $\langle h, u\rangle < c < \langle h, v\rangle$.
Si K est une partie non vide et convexe de $\mathbb{R}^n$, et x un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on appelle *projection de x sur K* et on note $p(x)$ s'il existe, tout vecteur y de K qui vérifie, pour tout vecteur z de K : $||x - y|| \leqslant ||x - z||$, c'est-à-dire tel que $||x - y|| = \min\limits_{z \in K} ||x - z||$.

Partie I. Projection sur un convexe fermé

1. *Exemple 1.* Soit K le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par : $K = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 / z_1 \leqslant 1 \text{ et } z_2 \leqslant 1\}$, et $x = (x_1, x_2)$ un vecteur donné de $\mathbb{R}^2$ n'appartenant pas à K tel que $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$.

a) Montrer que l'ensemble K est convexe et fermé. K est-il borné ?

b) Établir l'existence et l'unicité de la projection $p(x)$ de x sur K. Déterminer cette projection.

c) Faire une figure représentant le convexe K, un vecteur x et la projection $p(x)$.

d) Écrire une fonction Pascal d'en-tête `distance(x1,x2 : real) : real` qui à tout vecteur $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ n'appartenant pas à K et tel que $x_1 > 0, x_2 > 0$, associe le réel $||x - p(x)||$.

e) Vérifier que pour tout vecteur z de K, on a : $\langle z - p(x), x - p(x)\rangle \leqslant 0$.

f) Montrer qu'il existe un réel c qui vérifie, pour tout vecteur z de K : $\langle x - p(x), z\rangle < c < \langle x - p(x), x\rangle$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

2. *Exemple 2.* Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, différent de $\{\vec{0}\}$ et de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que E est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$. On admet qu'elle est fermée.

b) Dans cette question, E est l'ensemble des vecteurs $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ de $\mathbb{R}^4$ qui vérifient l'équation : $w_1 + w_2 - w_3 - w_4 = 0$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$ n'appartenant pas à E. Déterminer $\min_{w \in E} ||x - w||$ et le vecteur $p(x)$.

Cas général : soit K une partie convexe, fermée et non vide de $\mathbb{R}^n$, et x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui n'appartient pas à K.

3. Soit f la fonction à valeurs réelles définie sur K par : pour tout z de K, $f(z) = \|x - z\|$.

a) Justifier la continuité de la fonction f.

b) Soit z_0 un vecteur quelconque de K. On considère la boule fermée B_0 de centre x et de rayon $\|x - z_0\|$. On pose : $K' = B_0 \cap K$. Justifier que K' est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$.

c) En déduire que f admet un minimum sur K'. Soit $\hat{z}$ tel que $f(\hat{z}) = \min_{z \in K'} f(z)$.

d) Montrer que l'inégalité $\|x - z\| \geqslant \|x - \hat{z}\|$ est satisfaite pour tout vecteur z de K. Conclure.

4. a) Vérifier pour tous vecteurs a et b de $\mathbb{R}^n$, l'identité : $\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{4}||a - b||^2 = \frac{1}{2}||x - a||^2 + \frac{1}{2}||x - b||^2$.

b) On pose : $d = \min_{z \in K} ||x - z||$. Soit u et v deux vecteurs de K vérifiant $d = ||x - u|| = ||x - v||$.

À l'aide de la question précédente, montrer que $u = v$. Conclure.

5. On rappelle que $p(x)$ désigne la projection du vecteur x sur K.

a) Établir pour tout vecteur z de K et pour tout réel t de $[0, 1]$, l'inégalité :

$$||x - p(x)||^2 \leqslant ||x - (tz + (1 - t)p(x))||^2$$

b) En déduire pour tout z de K, l'inégalité : $\langle z - p(x), x - p(x)\rangle \leqslant 0$.

c) Réciproquement, on suppose qu'il existe un vecteur y de K tel que pour tout vecteur z de K, on a : $\langle z - y, x - y\rangle \leqslant 0$. Montrer que $y = p(x)$. Conclure.

d) Établir l'inégalité : $\langle x - p(x), p(x)\rangle < \langle x - p(x), x\rangle$. Montrer que $x - p(x)$ sépare les ensembles K et $\{x\}$.

Partie II. Un cas particulier

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, des réels strictement positifs. On pose : $K = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2 \leqslant 1\}$.

6. Montrer que K est un sous-ensemble convexe, fermé et borné de $\mathbb{R}^n$.

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à K et vérifiant pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $x_i > 0$. On pose : $K_0 = \{z \in K / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2 = 1\}$ et $K_1 = \{z \in K / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2 < 1\}$.

7. Soit f la fonction à valeurs réelles définie sur K par : $f(z) = ||x - z||^2$.

a) Montrer que f est de classe C^1 sur l'ouvert K_1.

b) La restriction de f à K_1 admet-elle des points critiques ? En déduire que $p(x)$ appartient à K_0.

c) Montrer que les coordonnées de $p(x)$ sont positives ou nulles, non toutes nulles.

8. On définit l'ouvert Ω par : $\Omega = \{(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) / \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ z_i > 0$ et $(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, 0) \in K_1\}$.

Soit Ψ et H les fonctions à valeurs réelles définies sur Ω par : $\Psi(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) = \sqrt{\frac{1}{\alpha_n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2\right)}$ et

$$H(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - z_i)^2 + (x_n - \Psi(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}))^2.$$

On suppose que $(z_1^*, z_2^*, \ldots, z_{n-1}^*)$ est un point critique de H.

On note $z_n^* = \Psi(z_1^*, z_2^*, \ldots, z_{n-1}^*)$ et $z^* = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_{n-1}^*, z_n^*)$.

a) Montrer que z_n^* est strictement positif et que le vecteur z^* appartient à K_0.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

b) On pose : $\lambda = \dfrac{1}{\alpha_n}\left(\dfrac{x_n}{z_n^*} - 1\right)$. Montrer que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $z_i^* = \dfrac{x_i}{1 + \lambda\alpha_i}$.

c) On pose : $\beta = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\left(\dfrac{-1}{\alpha_i}\right)$. Montrer que $\lambda > \beta$.

d) Étudier la fonction définie sur $]\beta, +\infty[$ par $y \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i x_i^2}{(1+\alpha_i y)^2}$. En déduire l'existence d'un unique réel λ_0 vérifiant $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i x_i^2}{(1+\lambda_0\alpha_i)^2} = 1$. Montrer que λ_0 est strictement positif.

Expliciter les coordonnées du vecteur z^* en fonction de λ_0 et des réels α_i et x_i ($i \in [\![1, n]\!]$).

9. a) Établir pour tout z de K, l'inégalité : $\langle z - z^*, x - z^*\rangle \leqslant 0$. En déduire que $z^* = p(x)$.

b) Montrer que le réel $c = \dfrac{\lambda_0}{2}\left(1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i x_i^2}{1+\lambda_0\alpha_i}\right)$ vérifie pour tout z de K : $\langle x - p(x), z\rangle < c < \langle x - p(x), x\rangle$.

Partie III. Une séparation de deux convexes

On admet la proposition suivante : si K_1 et K_2 sont deux convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ tels que $K_1 \cap K_2 = \{x_0\}$ ($x_0 \in \mathbb{R}^n$), alors il existe un vecteur h non nul de $\mathbb{R}^n$ et un réel c tels que, pour tout x de K_1, pour tout y de K_2, on a : $\langle h, x\rangle \leqslant c \leqslant \langle h, y\rangle$.

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des parties K de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient les trois conditions suivantes :

i) K est convexe, fermée, bornée et contenue dans $\{x \in \mathbb{R}^n / x \geqslant \vec{0}\}$;

ii) il existe un vecteur x de K dont toutes les coordonnées sont strictement positives ;

iii) pour tout x de K et tout y de $\mathbb{R}^n$, on a : $[x \geqslant y \geqslant \vec{0}] \Rightarrow y \in K$.

10. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un exemple d'élément K de $\mathcal{B}_2$.

Dans toute la suite de cette partie, on se donne un élément K de $\mathcal{B}_n$.

11. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ est *strictement concave* si, pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $a < b$, pour tout réel t de $]0, 1[$, on a : $f(ta + (1-t)b) > tf(a) + (1-t)f(b)$.
Montrer que la fonction ln est strictement concave sur $\mathbb{R}^{+*}$.

12. Soit g la fonction à valeurs réelles définie sur K par : $g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$.

a) Justifier que g admet un maximum sur K.

b) Soit u un vecteur de K tel que $g(u) = \max\limits_{x \in K} g(x)$. Montrer que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $u_i > 0$.

c) Établir l'unicité du vecteur u de K tel que $g(u) = \max\limits_{x \in K} g(x)$.

(on pourra raisonner par contraposée et utiliser la question 11)

13. On note $\phi^*(K) = (\phi_1^*(K), \phi_2^*(K), \ldots, \phi_n^*(K))$ l'unique vecteur de K en lequel la fonction g atteint son maximum.
On pose : $F = \left\{\left(\dfrac{x_1}{\phi_1^*(K)}, \dfrac{x_2}{\phi_2^*(K)}, \ldots, \dfrac{x_n}{\phi_n^*(K)}\right) \in \mathbb{R}^n, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\right\}$.

a) Montrer que F est un élément de $\mathcal{B}_n$.

b) Montrer que pour tout vecteur y de F, on a : $\prod\limits_{i=1}^{n} y_i \leqslant 1$.

14. On pose : $A = \{x \in \mathbb{R}^n / x \geqslant \vec{0}$ et $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \geqslant 1\}$.

a) Montrer que A est fermé.

b) En utilisant la question 11, montrer que A est convexe.

15. Établir l'égalité : $A \cap F = \{\vec{1}\}$. En déduire l'existence d'un vecteur non nul h de $\mathbb{R}^n$ vérifiant, pour tout x de A et tout y de F : $\langle h, y\rangle \leqslant \langle h, \vec{1}\rangle \leqslant \langle h, x\rangle$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

16. On veut montrer dans cette question que les coordonnées de h sont toutes strictement positives.

a) On fait l'hypothèse selon laquelle $\overrightarrow{0} \geqslant h$. Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose : $v_k = \langle h, k\overrightarrow{1} \rangle$.
Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} v_k = -\infty$. En déduire que l'hypothèse faite est contredite et qu'il existe donc un entier i_0 de $[\![1, n]\!]$ tel que $h_{i_0} > 0$.

b) On suppose qu'il existe un entier i_1 de $[\![1, n]\!]$ tel que $h_{i_1} \leqslant 0$. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note $w^{(k)}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par : $w_{i_0}^{(k)} = \dfrac{1}{k}$, $w_{i_1}^{(k)} = k$ et, pour tout i de $[\![1, n]\!]$ avec $i \neq i_0$ et $i \neq i_1$, $w_i^{(k)} = 1$.
Soit $(z_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $z_k = \langle h, w^{(k)} \rangle$.
Étudier la convergence de la suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. En déduire que l'hypothèse faite est contredite et qu'en conséquence, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $h_i > 0$.

17. En utilisant un raisonnement semblable à celui des questions précédentes, montrer que toutes les coordonnées du vecteur h sont égales. En déduire que pour tout x de A et tout y de F, on a : $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \leqslant n \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Partie IV. La solution de Nash

Un élément K de $\mathcal{B}_n$ est interprété comme un problème de négociation. Les éléments de K représentent différents accords auxquels sont susceptibles d'aboutir n personnes. Pour x dans K, x_i est une mesure du «gain» de la personne i. Le statu quo en cas de désaccord est le vecteur nul.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on note $x[i, j]$ le vecteur déduit de x en échangeant les coordonnées de rangs i et j : $x[i, j]_i = x_j$, $x[i, j]_j = x_i$ et $x[i, j]_k = x_k$ si $k \notin \{i, j\}$.
Pour $K \subset \mathbb{R}^n$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on note $K[i, j]$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n / x[i, j] \in K\}$.
Pour $(a, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on note $a \otimes x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur $(a_1 x_1, \ldots, a_n x_n)$. Pour $a \in \mathbb{R}^n$, $K \subset \mathbb{R}^n$, on note $a \otimes K$ l'ensemble $\{a \otimes x / x \in K\}$.

Une *règle de partage* est une application $\phi : \mathcal{B}_n \to \mathbb{R}^n$ qui associe à tout problème de négociation K de $\mathcal{B}_n$, un vecteur $\phi(K)$ de $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse aux règles ϕ qui vérifient les propriétés suivantes :

P1 : Pour tout $K \in \mathcal{B}_n$, $\phi(K) \in K$ et il n'existe pas de point $x \in K$ tel que $x \neq \phi(K)$ et $x \geqslant \phi(K)$.
P2 : Pour tout $K \in \mathcal{B}_n$ et $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $a_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\phi(a \otimes K) = a \otimes \phi(K)$.
P3 : Pour tous $K \in \mathcal{B}_n$ et $K' \in \mathcal{B}_n$ tels que $K \subset K'$ et $\phi(K') \in K$, on a : $\phi(K') = \phi(K)$.
P4 : Pour tout $K \in \mathcal{B}_n$ et pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $[\![1, n]\!]^2$, on a : $\phi(K[i, j]) = (\phi(K))[i, j]$.

18. Les quatre propriétés P1, P2, P3 et P4 ont chacune une interprétation en terme de symétrie, ou d'optimalité, ou d'invariance par changement d'échelle ou d'invariance par élimination d'options non pertinentes (dans le désordre).
Quelle interprétation peut-on associer à chacune d'elles ? Justifier très brièvement votre réponse.

19. Montrer que ϕ^*, définie dans la question 13, vérifie les propriétés P1, P2, P3 et P4.

20. Soit ϕ une règle satisfaisant à P1, P2, P3 et P4.

a) On pose : $K_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / x \geqslant \overrightarrow{0} \text{ et } \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leqslant n\}$. A l'aide de P1 et P4, montrer que $\phi(K_0) = \overrightarrow{1}$.

b) Soit K un élément de $\mathcal{B}_n$. On considère l'ensemble F défini dans la question 13.
À l'aide de P3 et de la question 17, montrer que $\phi(F) = \overrightarrow{1}$. En déduire que $\phi(K) = \phi^*(K)$. Conclure.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2010

HEC-ESCP MATH I OPTION SCIENTIFIQUE

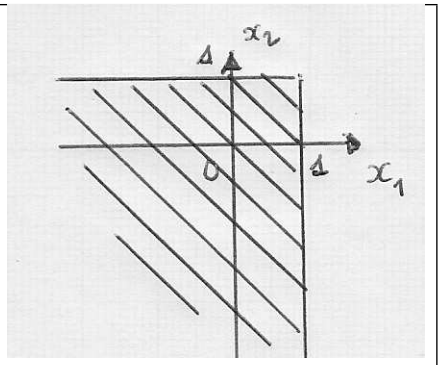
CORRIGE

PARTIE I : projection sur un convexe fermé

1) Exemple 1.

1–a)

K est représenté par la partie hachurée



x

- Soit $u \in K$; $u = (x_1, x_2)$ avec $u_1 \leq 1$ et $u_2 \leq 1$ et $v = (v_1, v_2) \in K$ avec aussi $v_1 \leq 1$ et $v_2 \leq 1$.

Pour $t \in [0;1]$, notons $w = tu + (1-t)v = (tu_1 + (1-t)v_1, tu_2 + (1-t)v_2) = (w_1, w_2)$.

$t \geq 0$, $u_1 \leq 1 \Longrightarrow tu_1 \leq t$; $1 - t \geq 0$, $v_1 \leq 1 \Longrightarrow (1-t)v_1 \leq 1 - t$; donc $w_1 = tu_1 + (1-t)v_1 \leq t + 1 - t = 1$. De même, $w_2 \leq 1$. Conclusion

$\forall (u, v) \in K^2,\ \forall t \in [0;1],\ tu + (1-t)v \in K$: K est convexe

- $K =]-\infty, 1] \times]-\infty, 1]$.

Notons $K_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ z_1 \leq 1\}$ et $K_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ z_2 \leq 1\}$. On a $K = K_1 \cap K_2$

Considérons l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ fait correspondre x_1 : c'est-à-dire $p_1(x_1, x_2) = x_1$.

Cette application est continue sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une application polynomiale.

$$\begin{aligned} p_1^{-1} <]-\infty, 1] > &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ p_1(x_1, x_2) \in]-\infty, 1]\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_1 \leq 1\} \end{aligned}$$

$p_1^{-1} <]-\infty, 1] >= K_1$. L'ensemble $]-\infty, 1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car son complémentaire $]1, +\infty[$ est un ouvert.

Puisque p_1 est continue, on conclut que K_1 est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

En considérant l'application $p_2 \ : \ (x_1, x_2) \mapsto x_2$, on montre que $p_2^{-1} <]-\infty, 1] >= K_2$. Donc K_2 est fermé dans $\mathbb{R}^2$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

K est l'intersection de 2 fermés, donc K est un fermé de $\mathbb{R}^2$

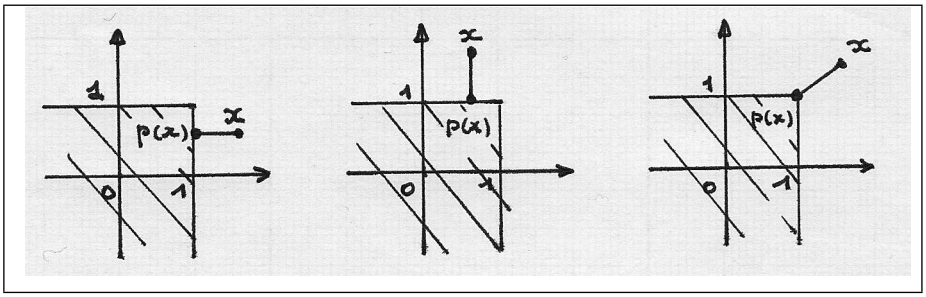
• K n'est pas borné. En effet considérons la suite (u_n) de $\mathbb{R}^2$ définie par $u_n = (-n, 0)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que u_n appartient à K. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} ||u_n|| = \lim\limits_{n\to+\infty} n$, donc $||u_n|| \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

1–b)

Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $z = (z_1, z_2) \in K$.

• Si $x \in K$, alors $p(x) = x$ car $||x - x|| \leq ||x - z||$ pour tout z, mais ceci n'est pas à envisager.

• Si $x \notin K$, il y a 3 situations illustrées ci-dessous :



i) $x_1 > 1$ et $0 < x_2 \leq 1$. Première situation.

Considérons $y = (1, x_2)$. Il est clair que $y \in K$ puisque $1 \leq 1$.

$||x - y|| = \sqrt{(x-1)^2} = x_1 - 1$ car $x_1 > 1$.

$\forall z = (z_1, z_2) \in K$, $||x - z|| = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} \geq \sqrt{(x_1 - z_1)^2} = |x_1 - z_1| = x_1 - z_1$ car $z_1 \leq 1 < x_1$.

Or $z_1 \leq 1 \Longrightarrow x_1 - z_1 \geq x_1 - 1$, d'où l'on conclut

$\forall z = (z_1, z_2) \in K$, $||x - z|| \geq ||x - y||$ avec égalité si et seulement si $(x_2 - z_2)^2 = 0$ et $x_1 - z_1 = x_1 - 1$, c'est-à-dire si et seulement si $z_2 = x_2$ et $z_1 = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $z = y$

Soit $x = (x_1, x_2)$ avec $x_1 > 1$. Alors $p(x) = (1, x_2)$ et il est unique

ii) $x_2 > 1$ et $0 < x_1 \leq 1$. Deuxième situation.

Le même raisonnement donnera

Soit $x = (x_1, x_2)$ avec $x_2 > 1$. Alors $p(x) = (x_1, 1)$ et il est unique

iii) $x_1 > 1$ et $x_2 > 1$. Troisième situation.

Avec les notations précédentes, $||x - z|| = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2}$.

$x_2 - z_2 \geq x_2 - 1 > 0$ car $z_2 \leq 1 < x_2$, donc $(x_2 - z_2)^2 \geq (x_2 - 1)^2$.

De même $(x_1 - z_1)^2 \geq (x_1 - 1)^2$. Il en résulte que

$||x - z|| \geq \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2} = ||x - (1, 1)||$; il y a égalité si et seulement si $(x_1 - z_1)^2 = (x_1 - 1)^2$ et $(x_2 - z_2)^2 = (x_2 - 1)^2$;

$(x_1 - z_1)^2 = (x_1 - 1)^2 \Longleftrightarrow |x_1 - z_1| = |x_1 - 1| \Longleftrightarrow x_1 - z_1 = x_1 - 1$ car ces deux nombres sont positifs ou nuls et finalement $z_1 = 1$.

De même $(x_2 - z_2)^2 = (x_2 - 1)^2 \Longleftrightarrow z_2 = 1$.

Soit $x = (x_1, x_2)$ avec $x_1 > 1$ et $x_2 > 1$; $p(x) = (1, 1)$ et il est unique

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

1–c)

La figure est déjà faite à la question b).

1–d)

function distance (x1,x2 : real) : real ;
var d : real ;
Begin
if (x1>1) and (x2<=1) then d := x1-1 ;
if (x1<= 1) and (x2>1) then d := x2-1 ;
if (x1>1) and (x2>1) then d := sqrt(sqr(x1-1)+sqr(x2-1)) ;
distance := d ;
End ;

1–e)

Reprenons les trois situations pour $x = (x_1, x_2)$. Soit $z = (z_1, z_2) \in K$.

i) $x_1 > 1$ et $x_2 \leq 1$; alors $p(x) = (1, x_2)$.

$\langle z - p(x), x - p(x)\rangle = \langle (z_1 - 1, z_2 - x_2), (x_1 - 1, 0)\rangle = (z_2 - 1)(x_1 - 1)$. Or $z_2 - 1 \leq 0$ et $x_1 - 1 > 0$, donc $\langle z - p(x), x - p(x)\rangle \leq 0$.

ii) $x_1 \leq 1$ et $x_2 > 1$; alors $p(x) = (x_1, 1)$.

$\langle z - p(x), x - p(x)\rangle = \langle (z_1 - x_1, z_2 - 1), (0, x_2 - 1)\rangle = (z_2 - 1)(x_2 - 1)$. Or $z_2 - 1 \leq 0$ et $x_2 - 1 > 0$, donc $\langle z - p(x), x - p(x)\rangle \leq 0$.

iii) $x_1 > 1$ et $x_2 > 1$; alors $p(x) = (1, 1)$.

$\langle z - p(x), x - p(x)\rangle = \langle (z_1 - 1, z_2 - 1), (x_1 - 1, x_2 - 1)\rangle = (z_1 - 1)(x_1 - 1) + (z_2 - 1)(x_2 - 1)$. Or $(z_1 - 1)(x_1 - 1) \leq 0$ ainsi que $(z_2 - 1)(x_2 - 1)$, donc $\langle z - p(x), x - p(x)\rangle \leq 0$.

Pour tout $(x_1, x_2) \notin K$ / x_1 et $x_2 > 0$, $\langle z - p(x), x - p(x)\rangle \leq 0$

1–f)

Reprenons les trois situations pour $x = (x_1, x_2)$. Soit $z = (z_1, z_2) \in K$.

i) $x_1 > 1$ et $x_2 \leq 1$; alors $p(x) = (1, x_2)$.

$\langle x - p(x), z\rangle = \langle (x_1 - 1, 0), (z_1, z_2)\rangle = z_1(x_1 - 1)$.

$\langle x - p(x), x\rangle = \langle (x_1 - 1, 0), (x_1, x_2)\rangle = x_1(x_1 - 1)$.

$x_1 - 1 > 0$ et $z_1 \leq 1 < x_1$. Multiplions cet encadrement par $x_1 - 1$, on obtient

$z_1(x_1 - 1) \leq (x_1 - 1) < x_1(x_1 - 1)$ donc $\langle x - p(x), z\rangle \leq (x_1 - 1) < \langle x - p(x), x\rangle$.

L'intervalle ouvert $](x_1 - 1), \langle x - p(x), x\rangle[$ n'est pas vide, donc

il existe $c \in](x_1 - 1), \langle x - p(x), x\rangle[$. Ce réel c est indépendant de z et on a

$\langle x - p(x), z\rangle \leq (x_1 - 1) < c < \langle x - p(x), x\rangle$, donc $\langle x - p(x), z\rangle < c < \langle x - p(x), x\rangle$

ii) $x_1 \leq 1$ et $x_2 > 1$; alors $p(x) = (x_1, 1)$.

$\langle x - p(x), z\rangle = \langle (0, x_2 - 1), (z_1, z_2)\rangle = z_2(x_2 - 1)$.

$\langle x - p(x), x\rangle = x_2(x_2 - 1)$.

On a $z_2 \leq 1 < x_2$. Multiplions cet encadrement par $x_2 - 1 > 0$, il vient

$z_2(x_2 - 1) \leq x_2 - 1 < x_2(x_2 - 1)$, c'est-à-dire $\langle x - p(x), z\rangle \leq x_2 - 1 < \langle x - p(x), x\rangle$.

L'intervalle ouvert $](x_2 - 1), \langle x - p(x), x\rangle[$ n'est pas vide, donc

il existe $c \in](x_2 - 1), \langle x - p(x), x\rangle[$. Ce réel c est indépendant de z et on a

$\langle x - p(x), z\rangle \leq (x_2 - 1) < c < \langle x - p(x), x\rangle$, donc $\langle x - p(x), z\rangle < c < \langle x - p(x), x\rangle$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

iii) $x_1 > 1$ et $x_2 > 1$; alors $p(x) = (1,1)$.

$\langle x - p(x), z\rangle = \langle (x_1 - 1, x_2 - 1), (z_1, z_2)\rangle = z_1(x_1 - 1) + z_2(x_2 - 1)$.

$\langle x - p(x), x\rangle = x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1)$.

On a $z_1 \leq 1 < x_1$; multiplions cet encadrement par $x_1 - 1 > 0$, il vient

$z_1(x_1 - 1) \leq x_1 - 1 < x_1(x_1 - 1)$.

De même $z_2(x_2 - 1) \leq x_2 - 1 < x_2(x_2 - 1)$, puisque $z_2 \leq 1 < x_2$ et $x_2 - 1 > 0$. En ajoutant ces encadrements, on obtient :

$\langle x - p(x), z\rangle \leq x_1 + x_2 - 2 < \langle x - p(x), x\rangle$. L'intervalle ouvert $]x_1 + x_2 - 2, \langle x - p(x), x\rangle[$ n'est pas vide, donc il existe $c \ / \ x_1 + x_2 - 2 < c < \langle x - p(x), x\rangle$ et a fortiori $\langle x - p(x), z\rangle < c < \langle x - p(x), x\rangle$ et ce réel ne dépend pas de z.

Dans tous les cas de figure, si $x \notin K$, $\exists\, c \in \mathbb{R} \ / \ \forall z \in K,\ \langle x - p(x), z\rangle < c < \langle x - p(x), x\rangle$

2) Exemple 2.

2–a)

$\forall (u,v) \in E^2,\ \forall t \in [0;1],\ tu + (1-t)v \in E$ par stabilité de E par combinaisons linéaires :

E est convexe

2–b)

Il s'agit en fait de déterminer la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur E et de l'appliquer au vecteur x.

- L'application $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{R}^4 \mapsto w_1 + w_2 - w_3 - w_4$ est une forme linéaire φ de $\mathbb{R}^4$. Cette forme linéaire est évidemment non nulle. Son image, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, est a priori de dimension 0 ou 1. Donc $\dim \operatorname{Im} \varphi = 1$ et par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 3$. Or $\operatorname{Ker} \varphi = E$. Donc $\dim E = 3$.

Nous allons déterminer une base orthogonale de E puis nous la normerons.

$u_1 = (1,0,0,1)$ et $u_2 = (0,1,1,0)$ sont évidemment des vecteurs de E et ils sont orthogonaux.

Déterminons $u_3 \neq 0_E \in E \ / \ u_3 \perp u_1$ et $u_3 \perp u_2$. Si nous notons $u_3 = (a,b,c,d)$, on doit satisfaire au système $\begin{cases} a+b-c-d &= 0 & u_3 \in E \\ a \quad\quad +d &= 0 & u_3 \perp u_1 \\ b+c &= 0 & u_3 \perp u_2 \end{cases}$

Le vecteur $u_3 = (1,-1,1,-1)$ convient. Normons ces trois vecteurs.

$||u_1|| = \sqrt{2} = ||u_2||$; $||u_3|| = 2$, donc si l'on pose

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)$ et $v_3 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$, on peut affirmer :

La famille (v_1, v_2, v_3) est une base orthormée de E

Si l'on nomme p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur E, on sait, d'après le cours, que

$$\forall x = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ p(x) = \sum_{k=1}^{3} \langle x, v_i\rangle v_i.$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \langle x, v_1\rangle v_1 + \langle x, v_2\rangle v_2 + \langle x, v_3\rangle v_3 \\ &= \tfrac{1}{2}(a+d)(1,0,0,1) + \tfrac{1}{2}(b+c)(0,1,1,0) + \tfrac{1}{4}(a-b+c-d)(1,-1,1,-1) \end{aligned}$$

Le calcul sans difficultés donne

$$p(x) = \tfrac{1}{4}(3a - b + c + d, -a + 3b + c + d, a + b + 3c - d, a + b - c + 3d)$$

D'après le cours, $\min\limits_{w \in E} ||x - w|| = ||x - p(x)||$.

$x - p(x) = \frac{1}{4}(a+b-c-d, a+b-c-d, -a-b+c+d, -a-b+c+d) = \frac{1}{4}(a+b-c-d)(1,1,-1,-1)$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

$||x-p(x)|| = \frac{1}{4}|a+b-c-d|||(1,1,-1,-1)|| = \frac{1}{4}|a+b-c-d| \times 2.$

$$\boxed{\forall x=(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4,\ \min_{w\in E}||x-w|| = \frac{1}{2}|a+b-c-d|}$$

Remarque : on peut procéder différemment et peut-être plus rapidement.

D'après l'équation de E : $w_1+w_2-w_3-w_4=0$ donnée en base orthonormée, on déduit que le vecteur $u=(1,1,-1,-1)$ est orthogonal à tout vecteur de E. Donc $u\in E^\perp$. Or $E^\perp$ est de dimension 1 puisque $\dim E = 3$, donc $E^\perp = \text{vect}(u)$.

Le cours nous dit que, pour tout vecteur $x\in\mathbb{R}^4$, $x = p(x)+\lambda u$. On détermine λ en exprimant que $p(x)$ est orthogonal à u.

Soit $x=(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}\langle p(x),u\rangle = 0 &\iff \langle x,u\rangle + \lambda||u||^2 = 0\\ &\iff a+b-c-d+4\lambda = 0\\ &\iff \lambda = -\frac{1}{4}(a+b-c-d)\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}p(x) &= (a,b,c,d) - \frac{1}{4}(a+b-c-d)(1,1,-1,-1)\\ &= \frac{1}{4}(3a-b+c+d,-a+3b+c+d,a+b+3c-d,a+b-c+3d)\end{aligned}$$

On retrouve bien sûr le résultat précédent.

3) Cas général.

3–a)

Notons $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $z=(z_1,\dots,z_n)$.

$f(z) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-z_i)^2}$. L'application $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n (x_i-z_i)^2$ est une application polynomiale continue sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. La fonction $t\mapsto\sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc par composition l'application g est continue sur $\mathbb{R}^n$; il s'ensuit que sa restriction f à K est continue sur K.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } K}$$

3–b)

La boule fermée K_0 est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$, donc $K' = K\cap K_0$ est l'intersection de deux fermés de $\mathbb{R}^n$, c'est une fermé.

Si l'on note $r = ||x-z_0||$, on peut dire que $\forall z\in K\cap K_0$, $||z-x||\leq r$. Mais $\Big|\,||z||-||x||\,\Big| \leq ||z-x|| \leq r$ implique $||z||\leq ||x||+r$.

K' est donc bornée. (En fait, on sait certainement que toute partie d'une partie bornée est bornée).

$$\boxed{K' \text{ est une partie fermé, bornée de } \mathbb{R}^n}$$

3–c)

D'après le cours, toute fonction continue sur une partie fermée, bornée de $\mathbb{R}^n$ y admet un minimum.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un minimum, noté } \widehat{z} \text{ sur } K'}$$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

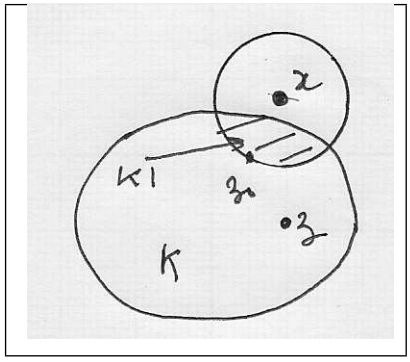
Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

3–d)

→ Puisque $\widehat{z}$ est un minimum de f sur K', on a $\forall z \in K',\ f(z) \geq f(\widehat{z})$, c'est-à-dire

$$\forall z \in K',\ ||x-z|| \geq ||x-\widehat{z}||$$

→ Si $z \notin K'$, c'est-à-dire si $z \in K \setminus K'$



$z \in K$ et $z \notin K' \Longrightarrow z \notin B_0$. Donc $||x-z|| > ||x-z_0|| \geq ||x-\widehat{z}||$, d'où l'on conclut que $||x-z|| > ||x-\widehat{z}||$. Il en résulte qu'aucun point de $K \setminus K'$ ne peut être un minimum de f sur K

On vient de montrer qu'il existe $\widehat{z} \in K$ / $\forall z \in K\ f(z) \geq f(\widehat{z})$:
f admet un minimum sur K

4–a)

$$\begin{aligned}
||x-\tfrac{a+b}{2}||^2 + \tfrac{1}{4}||a-b||^2 &= ||x||^2 + \tfrac{1}{4}||a+b||^2 - 2\langle x, \tfrac{a+b}{2}\rangle + \tfrac{1}{4}||a||^2 + \tfrac{1}{4}||b||^2 - \tfrac{1}{4}.2\langle a,b\rangle \\
&= ||x||^2 + \tfrac{1}{4}||a||^2 + \tfrac{1}{4}||b||^2 + \tfrac{1}{2}\langle a,b\rangle - \langle x, a+b\rangle + \tfrac{1}{4}||a||^2 + \tfrac{1}{4}||b|| - \tfrac{1}{2}\langle a,b\rangle \\
&= ||x^2|| + \tfrac{1}{2}||a||^2 + \tfrac{1}{2}||b||^2 - \langle x, a+b\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}||x||^2 + \tfrac{1}{2}||a||^2 - \langle x,a\rangle + \tfrac{1}{2}||x||^2 + \tfrac{1}{2}||b||^2 - \langle x,b\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}||x-a||^2 + \tfrac{1}{2}||x-b||^2
\end{aligned}$$

On a bien $||x-\frac{a+b}{2}||^2 + \frac{1}{4}||a-b||^2 = \frac{1}{2}||x-a||^2 + \frac{1}{2}||x-b||^2$

4–b)

$||x-\frac{u+v}{2}||^2 + \frac{1}{4}||u-v||^2 = \frac{1}{2}||x-u||^2 + \frac{1}{2}||x-v||^2 = d^2$ puisque $||x-u||^2 = ||x-v||^2 = d^2$.

Or $\frac{u+v}{2} \in K \Longrightarrow ||x-\frac{u+v}{2}||^2 \geq d^2$. L'égalité précédente donne $d^2 \geq \frac{1}{4}||u-v||^2 + d^2$, donc $||u-v||^2 \leq 0$ et finalement $||u-v||^2 = 0$ donc $u = v$.

Le miniumum $\widehat{z}$ de f sur K est unique

5–a)

D'après le rappel et puisque $\widehat{z}$ est unique, $\boxed{\widehat{z} = p(x)}$

$\forall t \in [0;1],\ \forall (z, p(x)) \in K^2 \Longrightarrow tz + (1-t)p(x) \in K$, donc

$$\forall t \in [0;1],\ \forall z \in K,\ ||x-p(x)|| \leq ||x-(tz+(1-t)p(x))||$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.