BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2010

Conceptions : H.E.C. – E.S.C.P. / EUROPE

283

OPTION SCIENTIFIQUE

CCIP_M2_S

MATHEMATIQUES II

Lundi 10 mai 2010, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$;
- pour tout réel $t > 0$, X_t désigne une variable aléatoire à valeurs strictement positives qui suit la loi gamma de paramètre t, notée $\gamma(t)$;
- U désigne une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1]$;
- l'espérance et la variance d'une variable aléatoire A sont notées respectivement $E(A)$ et $V(A)$;
- la notation exp désigne la fonction exponentielle de base e .

On rappelle ou on admet sans démonstration les résultats suivants :

- la fonction Γ définie pour tout réel $t > 0$ par $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{t-1}du$, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$; on note Γ' et Γ'' les dérivées première et seconde de la fonction Γ. Pour tout réel $t > 0$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln u)e^{-u}u^{t-1}du$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln u)^2 e^{-u}u^{t-1}du$ sont convergentes et valent respectivement $\Gamma'(t)$ et $\Gamma''(t)$;
- on a pour tout réel $t > 0$: $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$;
- pour tout réel $t > 0$, une densité f_{X_t} de X_t est donnée par : $f_{X_t}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(t)} e^{-x}x^{t-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$;
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

L'objet du problème est de démontrer quelques propriétés de la fonction Γ en utilisant des méthodes essentiellement probabilistes.

Partie I. Quelques résultats préliminaires

1. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On considère les deux suites $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\gamma_n = h_n - \ln n$ et $v_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n$.

a) Montrer que la série de terme général v_n est convergente.

b) En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$; on note γ sa limite.

c) On pose pour tout réel $t > 0$: $d_{n,t} = \gamma + \ln(t+n) - h_n$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} d_{n,t}$.

2. a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $E(X_t)$ et $V(X_t)$.

b) On note pour tout réel $t > 0$, $\psi(t) = \Gamma'(t)/\Gamma(t)$, et ψ' la dérivée de ψ. Montrer que $E(\ln(X_t)) = \psi(t)$ et $V(\ln(X_t)) = \psi'(t)$.

3. a) Montrer que pour tout réel $t > 1$, $E(1/X_t)$ existe et calculer sa valeur.

b) Établir pour tout réel $x > 0$, l'encadrement : $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$.

En déduire que l'on a : $(\ln x)^2 \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^2 + (x-1)^2$.

c) À l'aide des questions précédentes, établir les inégalités suivantes : pour tout réel $t > 0$, $E\left(\ln\left(\dfrac{X_t}{t}\right)\right) \leqslant 0$;

pour tout réel $t > 1$, $E\left(\ln\left(\dfrac{X_t}{t}\right)\right) \geqslant -\dfrac{1}{t-1}$; pour tout réel $t > 2$, $E\left(\ln^2\left(\dfrac{X_t}{t}\right)\right) \leqslant \dfrac{2t}{(t-2)^2}$.

d) Soit t un réel fixé strictement positif. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\ln\left(\dfrac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

4. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}, (B_n)_{n\geqslant 1}$ et $(C_n)_{n\geqslant 1}$ trois suites de variables aléatoires à densité qui convergent en probabilité vers 0. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $D_n = A_n + B_n + C_n$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle qui converge vers u. On considère deux variables aléatoires réelles à densité M et N telles que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, M est de même loi que $N + D_n + u_n$.

a) Montrer pour tout réel $\varepsilon > 0$, l'inclusion : $[|D_n| > \varepsilon] \subset [|A_n| > \varepsilon/3] \cup [|B_n| > \varepsilon/3] \cup [|C_n| > \varepsilon/3]$.
En déduire que la suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

b) On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $V_n = D_n + u_n - u$. Montrer que la suite de variables aléatoires $(V_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0. En déduire la limite en probabilité de la suite $((N+u) + V_n)_{n\geqslant 1}$.

c) On admet sans démonstration que la convergence en probabilité entraîne la convergence en loi.
Montrer que les variables aléatoires M et $N + u$ sont de même loi.

5. Soit (α, β) un couple de réels strictement positifs, et X_α et X_β deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$. On pose : $T_{\alpha,\beta} = \dfrac{X_\alpha}{X_\beta}$, $Q_{\alpha,\beta} = \ln(T_{\alpha,\beta})$ et $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

a) Préciser $Q_{\alpha,\beta}(\Omega)$. Déterminer une densité de $\ln(X_\alpha)$ et de $-\ln(X_\beta)$ respectivement.

b) En déduire qu'une densité $f_{Q_{\alpha,\beta}}$ de $Q_{\alpha,\beta}$ est donnée par : pour tout réel x,

$$f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+\beta)y} \exp\left(-e^y(1+e^{-x})\right) dy$$

c) À l'aide du changement de variable $u = e^y(1+e^{-x})$, dont on justifiera la validité, établir la formule suivante : pour tout x réel, $f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} \times \dfrac{e^{\alpha x}}{(1+e^x)^{\alpha+\beta}}$.

d) En déduire une densité $f_{T_{\alpha,\beta}}$ de $T_{\alpha,\beta}$.

e) On pose : $J_{\alpha,\beta} = \dfrac{X_\alpha}{X_\alpha + X_\beta}$. Montrer qu'une densité $f_{J_{\alpha,\beta}}$ de $J_{\alpha,\beta}$ est donnée par :

$$f_{J_{\alpha,\beta}}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \notin]0,1[\\ \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} & \text{si } z \in]0,1[\end{cases}$$

Partie II. Étude de la variable aléatoire $\ln(X_t)$

Soit $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. On suppose que pour tout réel $\alpha > 0$, X_α est indépendante de chacune des variables aléatoires de la suite $(Y_k)_{k\geqslant 1}$.

On pose : $S_0 = 0$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i$.

6. Rappeler sans démonstration la loi de S_k ainsi que les valeurs respectives de $E(S_k)$ et $V(S_k)$.

7. a) Justifier pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité suivante : $\ln(X_t) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k}\right) + \ln(X_t + S_n)$.

b) Montrer que pour tout entier m de $\mathbb{N}^*$, la loi de $X_t + S_m$ est celle de X_{t+m}.

On admet jusqu'à la fin du problème les résultats suivants :

- soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Alors, pour tout p de $[\![1, n-1]\!]$, pour toutes fonctions réelles φ_1 et φ_2 continues, les variables aléatoires $\varphi_1(A_1, \ldots, A_p)$ et $\varphi_2(A_{p+1}, \ldots, A_n)$ sont indépendantes ;
- si A et B sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors AB admet une espérance et $E(AB) = E(A)E(B)$;
- pour tout couple (α, β) de réels strictement positifs, si les variables aléatoires X_α et X_β sont indépendantes, de lois respectives $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$, alors les variables aléatoires $\frac{X_\alpha}{X_\alpha + X_\beta}$ et $X_\alpha + X_\beta$ sont indépendantes.

8. On pose pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $R_{t,k} = \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k}$.

a) Montrer que $R_{t,1}$ et $R_{t,2}$ sont indépendantes. On admet dans la suite que les variables aléatoires $R_{t,k} (k \geqslant 1)$ sont indépendantes.

b) En déduire à l'aide des questions précédentes que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $\ln(X_t)$ et $\sum_{k=1}^{n} \ln(R_{t,k}) + \ln(X_{t+n})$ sont de même loi.

9. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $-\ln U$.

b) À l'aide de la question 5.e, calculer une densité $f_{R_{t,k}}$ de la variable aléatoire $R_{t,k}$.

c) Soit $(U_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U. Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $R_{t,k}$ et $U_k^{\frac{1}{t+k-1}}$ sont de même loi.

d) Déduire des questions précédentes que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\ln(X_t)$ est de même loi que la variable aléatoire $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{k+1}}{t+k}\right) + \ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) + d_{n,t} - \gamma$.

10. En utilisant les résultats des questions 1.c,2.b,3.c et 9.d, montrer que pour tout réel $t > 0$, on a :

$$E(\ln(X_t)) = \psi(t) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{t+k}\right) \text{ et } V(\ln(X_t)) = \psi'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2}$$

11. En utilisant la question 3.c, calculer $\lim_{t \to +\infty} (\psi(t) - \ln t)$.

12. On pose : $W = U^{1/\mu}$, où μ désigne un paramètre réel strictement positif inconnu. Afin d'estimer μ, on considère pour p supérieur ou égal à 3, un p-échantillon $(W_1, W_2, \ldots, W_p)$ i.i.d. de la loi de W.

On pose : $G_p = -p \left(\sum_{i=1}^{p} \ln W_i\right)^{-1}$. Justifier que la variable aléatoire G_p est un estimateur du paramètre μ. Est-il sans biais ? Est-il convergent ?

13. On rappelle que l'appel à la fonction Pascal `random` a pour résultat un nombre de type `real` pris au hasard dans l'intervalle $[0, 1[$.

a) Soit `X` la fonction Pascal suivante :

```
function X(lambda : real) : real ;
begin
  X := -ln(1-random)/lambda
end ;
```

Cette fonction simule une variable aléatoire réelle. Donner sa loi. Justifier votre réponse.

b) Écrire une fonction Pascal d'en-tête `g(n : integer) : real` simulant une variable aléatoire de loi $\gamma(n)$.

c) Soit `m` la fonction Pascal suivante :

```
function m(p : integer) : real ;
begin
  m := p/g(p)
end ;
```

On appelle la fonction `m` pour différentes valeurs de p de plus en plus grandes. Que devrait-on constater ?

Partie III. Quelques propriétés de la fonction Γ

Les notations sont celles des parties I et II.

14. *Première application : les formules de Wilks et Legendre.*

a) Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout réel $t > 0$, établir l'égalité :

$$2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{k+1}}{t+k}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{2k+1}}{\frac{t}{2}+k}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{2k+2}}{\frac{t+1}{2}+k}\right)+2\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)$$

b) Exprimer $w_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)$ en fonction de deux termes de la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} w_n=\ln 2$.

c) Pour $t>0$, soit X_t et $X_{t+\frac{1}{2}}$ deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(t)$ et $\gamma(t+\frac{1}{2})$. En utilisant les questions 4 et 9.d, montrer que la variable aléatoire $2\ln(X_t)$ est de même loi que la variable aléatoire $\ln(X_{\frac{t}{2}})+\ln(X_{\frac{t+1}{2}})+2\ln 2$.

d) On pose : $t=2s$. Déduire de la question précédente que pour tout réel $r>0$, $(X_{2s})^{2r}$ et $2^{2r}(X_s)^r(X_{s+\frac{1}{2}})^r$ sont de même loi.

e) En choisissant une valeur particulière de s, établir pour tout $r>0$, la formule :

$$2^{2r-1}\Gamma(r)\Gamma(r+\frac{1}{2})=\Gamma(2r)\sqrt{\pi}$$

15. *Deuxième application : la formule de Stirling.*

a) Déterminer quatre réels a,b,c,d tels que pour tout réel $u>0$, on a : $\frac{1}{u^2(u+1)^2}=\frac{a}{u^2}+\frac{b}{(u+1)^2}+\frac{c}{u}+\frac{d}{u+1}$.

En déduire pour tout $t>0$, la relation : $\psi'(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2}$.

On admet sans démonstration que pour tout $u>0$, on a :

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(u+\frac{1}{14})^3}-\frac{1}{(u+\frac{15}{14})^3}\right)\leqslant\frac{1}{u^2(u+1)^2}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{(u+1)^3}\right)$$

b) Déduire des deux résultats précédents, pour tout $t>0$, les deux encadrements :

$$\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6(t+\frac{1}{14})^3}\leqslant\psi'(t)-\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\text{ et }\ln t-\frac{1}{2t}-\frac{1}{12t^2}\leqslant\psi(t)\leqslant\ln t-\frac{1}{2t}-\frac{1}{12(t+\frac{1}{14})^2}$$

En déduire un équivalent de $E(\ln(X_t))$ et de $V(\ln(X_t))$ respectivement, lorsque t tend vers $+\infty$.

c) Calculer pour tout y vérifiant $y>t>0$, l'intégrale : $\int_t^y\left(\psi(x)-\ln(x)+\frac{1}{2x}\right)dx$.

Montrer pour t fixé, l'existence de $\lim_{y\to+\infty}\ln\left(\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}}e^{-y}}\right)$; on note θ cette limite.

d) En utilisant la question 14.e et l'identité : $x^x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^x\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{-x}$, valable pour $x>0$, calculer e^θ.

En déduire que $\Gamma(x)$ est équivalent à $\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}$, lorsque x tend vers $+\infty$.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2010

HEC-ESCP OPTION SCIENTIFIQUE : MATH II

CORRIGE

Partie I : quelques résultats préliminaires

1–a)

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n &= h_{n+1} - \ln(n+1) - h_n + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln(1+\frac{1}{n})\end{aligned}$$

Faisons un développement limité à l'ordre 1 de $\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$ en $\frac{1}{n}$ et un développement à l'ordre 2 de $\ln(1+\frac{1}{n})$.

$$\begin{aligned}v_n &= \frac{1}{n}(1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})) - (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n}o(\frac{1}{n}) + o(\frac{1}{n^2}) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\end{aligned}$$

Conclusion : $v_n \underset{(+\infty)}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$

La série de terme général $-\dfrac{1}{2n^2}$ est convergente (multiple de la série de Riemann $\dfrac{1}{n^2}$) ;

par équivalence des séries de signe constant (ici négatives), $\boxed{\text{la série } \sum v_n \text{ est convergente}}$

1–b)

Soit $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1}(\gamma_{k+1}-\gamma_k) = \gamma_n - \gamma_1$; donc $\displaystyle\gamma_n = \sum_{k=1}^{n-1} v_k + \gamma_1$.

Remarque : pour $n = 1$, la somme vaut 0, on retrouve $\gamma_1 = \gamma_1$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_k$ converge équivaut à $\displaystyle\Big(\sum_{k=1}^{n} v_k\Big)_{n\geq 1}$ converge, donc $\boxed{(\gamma_n)_{n\geq 1} \text{ est convergente}}$

Remarque : peut-être avons-nous redémontré un résultat du cours car la série $\sum(\gamma_{n+1}-\gamma_n)$ est appelée série associée à la suite (γ_n) et on "sait" que la suite et la série sont de même nature.

1–c)

$$\begin{aligned}d_{n,t} &= \gamma + \ln\Big(n(1+\frac{t}{n})\Big) - h_n \\ &= \gamma + \ln n + \ln(1+\frac{t}{n}) - h_n \\ &= \gamma - \gamma_n + \ln(1+\frac{t}{n})\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\lim_{n\to+\infty}(\gamma-\gamma_n)=\lim_{n\to+\infty}\ln(1+\frac{t}{n})=0\right)\Longrightarrow\lim_{n\to+\infty}d_{n,t}=0}$$

2–a)

D'après le cours $E(X_t)=V(X_t)=t$.

2–b)

$\psi(t)=\dfrac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$

Remarquons que ψ est continue, dérivable sur $]1,+\infty[$ d'après le préambule.

- D'après le théorème du transfert, sous réserve de convergence de l'intégrale,

$$\begin{aligned}E(\ln(X_t)) &= \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^{+\infty}(\ln u)\exp(-u)u^{t-1}du \qquad \text{(cette intégrale converge d'après le préambule)}\\ &= \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}.\end{aligned}$$

$$\boxed{E(\ln(X_t))=\psi(t)}$$

- D'après le préambule, l'intégrale $\dfrac{1}{\Gamma(t)}\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln u)^2\exp(-u)u^{t-1}du$ converge, on peut donc appliquer le théorème du transfert.

$E((\ln(X_t))^2)=\dfrac{1}{\Gamma(t)}\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln u)^2\exp(-u)u^{t-1}du=\dfrac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)}.$

On en conclut que $V(\ln(X_t))$ existe puisque les moments d'ordre 1 et 2 existent et, d'après la formule de Köenig-Huyghens,

$$\begin{aligned}V(\ln(X_t)) &= E((\ln(X_t))^2)-\Big(E(\ln(X_t))\Big)^2\\ &= \frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)}-\left(\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}\right)^2\\ &= \frac{\Gamma(t)\Gamma''(t)-\Gamma'^2(t)}{\Gamma^2(t)}.\end{aligned}$$

$$\boxed{V(\ln(X_t))=\psi'(t)}$$

3–a)

L'espérance $E(\frac{1}{X_t})$ existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{u}f_{X_t}(u)du$ est convergente.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{u}f_{X_t}(u)du=\frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^{+\infty}\exp(-u)u^{t-2}du.$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-u)u^{\alpha}du$ converge si et seulement si $\alpha>-1$ et alors elle vaut $\Gamma(\alpha+1)$.

Ici, $t>1$ ce qui équivaut à $t-2>-1$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-u)u^{t-2}du$ converge et vaut $\Gamma(t-1)$.

$$\boxed{\text{En résumé, } E(\frac{1}{X_t}) \text{ existe et } E(\frac{1}{X_t})=\frac{\Gamma(t-1)}{\Gamma(t)}=\frac{1}{t-1}}$$

d'après la relation rappelée dans le préambule.

3–b)

$\forall x>0,\ \ln x\leq x-1$ est due à la concavité de la fonction $\ln$.

$1-\frac{1}{x}\leq \ln x \iff -\ln x\leq \frac{1}{x}-1\iff \ln(\frac{1}{x})\leq\frac{1}{x}-1$. C'est aussi une inégalité de concavité.

$$\boxed{\forall x>0,\ 1-\frac{1}{x}\leq \ln x\leq x-1 \qquad \textbf{(0)}}$$

- Si $0<x\leq 1$, alors $1-\frac{1}{x}\leq 0$ de même que $\ln x$;

$$1-\frac{1}{x}\leq \ln x\leq 0\Longrightarrow \ln^2 x\leq (1-\frac{1}{x})^2\leq (1-\frac{1}{x})^2+\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0}$$

- Si $x\geq 1$, alors $\ln x\geq 0$ ainsi que $x-1$;

$$0\leq \ln x\leq (x-1)\Longrightarrow \ln^2 x\leq (x-1)^2\leq (x-1)^2+\underbrace{(1-\frac{1}{x})^2}_{\geq 0}$$

$$\boxed{\forall x>0,\ \ln^2 x\leq (x-1)^2+(1-\frac{1}{x})^2}$$

3–c)

- La variable X_t prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc $\frac{X_t}{t}$ également pour $t>0$.

L'encadrement précédent (0) s'applique

$$1-\frac{1}{\frac{X_t}{t}}\leq \ln\frac{X_t}{t}\leq\frac{X_t}{t}-1\iff 1-\frac{t}{X_t}\leq \ln\frac{X_t}{t}\leq \frac{X_t}{t}-1.$$

Sous réserve d'existence des espérances et par positivité de l'espérance,

$$E(1-\frac{t}{X_t})\leq E(\ln\frac{X_t}{t})\leq E(\frac{X_t}{t}-1).$$

D'après le théorème du transfert, sous réserve de convergence

$$E(\ln\frac{X_t}{t})=\frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^{+\infty}\ln\frac{u}{t}\exp(-u)u^{t-1}du=\frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^{+\infty}\ln u\exp(-u)u^{t-1}du-\frac{\ln t}{\Gamma(t)}\int_0^{+\infty}\exp(-u)u^{t-1}du.$$

D'après le préambule, les intégrales $\int_0^{+\infty}\ln u\exp(-u)u^{t-1}du$ et $\int_0^{+\infty}\exp(-u)u^{t-1}du$ convergent pour $t>0$.

Donc $E(\ln\frac{X_t}{t})$ existe

$E(\frac{1}{X_t})$ existe pour $t>1$ d'après 3–a), donc $E(1-\frac{t}{X_t})$ existe également et elle vaut

$$1-tE(\frac{1}{X_t})=1-\frac{t}{t-1}=-\frac{1}{t-1}.$$

$E(X_t)$ existe pour $t>0$, donc $E(\frac{X_t}{t}-1)$ existe et elle vaut $\frac{t}{t}-1=0$.

$$\boxed{\forall t>0,\ E(\ln(\frac{X_t}{t}))\leq 0 \text{ et } \forall t>1,\ E(\ln(\frac{X_t}{t}))\geq -\frac{1}{t-1}}$$

- De l'encadrement : $\forall x>0,\ \ln^2 x\leq (x-1)^2\leq (x-1)^2+(1-\frac{1}{x})^2$, on déduit

$\ln^2(\frac{X_t}{t})\quad\leq (1-\frac{t}{X_t})^2+(\frac{X_t}{t}-1)^2$

$$\boxed{\ln^2(\frac{X_t}{t})\leq 1-2\frac{t}{X_t}+\frac{t^2}{X_t^2}+\frac{X_t^2}{t^2}+1-2\frac{X_t}{t}. \qquad \textbf{(1)}}$$

- D'après le théorème du transfert et sous réserve d'existence

$E(\ln^2 \frac{X_t}{t}) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} \ln^2 \frac{u}{t} \exp(-u) u^{t-1} du$

Or

$$\begin{aligned} \ln^2 \frac{u}{t} &= \Big(\ln u - \ln t\Big)^2 = \ln^2 u - 2\ln u \ln t + \ln^2 t \qquad \text{donc} \\ \ln^2 \frac{u}{t} \exp(-u)u^{t-1} &= \ln^2 u \exp(-u)u^{t-1} - 2\ln u \ln t \exp(-u)u^{t-1} + \ln^2 t \exp(-u)u^{t-1} \end{aligned}$$

Les trois intégrales $\int_0^{+\infty} \ln^2 u \exp(-u)u^{t-1}du$, $\int_0^{+\infty} \ln u \exp(-u)u^{t-1}du$ et $\int_0^{+\infty} \exp(-u)u^{t-1}du$ convergent d'après le préambule, donc

$$E(\ln^2 \frac{X_t}{t}) \text{ existe et vaut } = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} \ln^2 \frac{u}{t} \exp(-u)u^{t-1}du$$

- $E(\frac{1}{X_t^2})$ existe $\iff \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} \exp(-u)u^{t-1}du$ converge

$\iff \int_0^{+\infty} \exp(-u)u^{t-3}du$ converge

$\iff t-3 > -1$ c'est-à-dire $\boxed{t > 2}$

Dans ces conditions, $E(\frac{1}{X_t^2}) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} \exp(-u)u^{t-3}du = \frac{1}{\Gamma(t)}\Gamma(t-2)$.

Or $\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1) = (t-1)(t-2)\Gamma(t-2)$, donc

$$\boxed{E\Big(\frac{1}{X_t^2}\Big) = \frac{1}{(t-1)(t-2)}}$$

- $E(\frac{1}{X_t})$ existe si et seulement si $t > 1$
- Les deux autres espérances (celles de X_t et X_t^2) existent pour $t > 0$
- Dans l'inégalité **(1)** toutes les espérances existent. Par linéarité et positivité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E(\ln^2 \frac{X_t}{t}) &\leq 2 - 2tE(\frac{1}{X_t}) + t^2E(\frac{1}{X_t^2}) + \frac{1}{t^2}E(X_t^2) - \frac{2}{t}E(X_t) \\ &\leq 2 - \frac{2t}{t-1} + \frac{t^2}{(t-1)(t-2)} + \frac{1}{t^2}(V(X_t) + (E(X_t))^2) - \frac{2t}{t} \qquad \text{(d'après Köenig-Huygens)} \\ &\leq -\frac{2t}{t-1} + \frac{t^2}{(t-1)(t-2)} + \frac{1}{t^2}(t+t^2) \\ &\leq -\frac{2t}{t-1} + \frac{t^2}{(t-1)(t-2)} + \frac{t+1}{t} \\ &\leq \frac{-2t^2(t-2) + t^3 + (t+1)(t-1)(t-2)}{t(t-1)(t-2)} \\ &\leq \frac{2t^2 + (2-t)}{t(t-1)(t-2)} \end{aligned}$$

$t > 2 \implies 2t^2 + (2-t) \leq 2t^2$; $t-1 > t-2 > 0 \implies t(t-1)(t-2) > t(t-2)^2 > 0$, donc $\frac{1}{t(t-1)(t-2)} < \frac{1}{t(t-2)^2}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$(0 < 2t^2 + (2-t) \leq 2t^2$ et $0 < \frac{1}{t(t-1)(t-2)} < \frac{1}{t(t-2)^2}) \implies \frac{2t^2 + (2-t)}{t(t-1)(t-2)} \leq \frac{2t^2}{t(t-2)^2} = \boxed{\frac{2t}{(t-2)^2}}$

$$\boxed{\forall t > 2,\ E\Big(\ln^2 \frac{X_t}{t}\Big) \leq \frac{2t}{(t-2)^2}}$$

3–d)

$\forall t > 0,\ \forall n \geq 1,\ \ln(\dfrac{X_{t+n}}{t+n})$ admet une variance d'après 2–b). Appliquons l'inégalité de Markov :

$$\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leq P\Big(\Big|\ln(\frac{X_{t+n}}{t+n})\Big| > \varepsilon\Big) \leq \frac{E(\ln^2(\frac{X_{t+n}}{t+n}))}{\varepsilon^2}. \qquad \textbf{(2)}$$

D'après la question précédente 3–c), dès que $t+n > 2,\ 0 \leq E(\ln^2(\dfrac{X_{t+n}}{t+n})) \leq \dfrac{2(t+n)}{(t+n-2)^2}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2(t+n)}{(t+n-2)^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$. Donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} E(\ln^2(\dfrac{X_{t+n}}{t+n})) = 0$

$\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(\Big|\ln(\dfrac{X_{t+n}}{t+n})\Big| > \varepsilon\Big) = 0$ d'après l'encadrement **(2)**.
Cela veut que la suite de variables $\Big(\ln(\dfrac{X_{t+n}}{t+n})\Big)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0

4–a)

$|D_n| \leq |A_n| + |B_n| + |C_n|$; donc $|D_n| > \varepsilon \Longrightarrow |A_n| + |B_n| + |C_n| > \varepsilon$.
Cela se traduit par $(|D_n| > \varepsilon) \subset (|A_n| + |B_n| + |C_n| > \varepsilon)$.
De plus, $|A_n| + |B_n| + |C_n| > \varepsilon \Longrightarrow (|A_n| > \frac{\varepsilon}{3})$ ou $(|B_n| > \frac{\varepsilon}{3})$ ou $(|C_n| > \frac{\varepsilon}{3})$, car

$$\Big((|A_n| \leq \tfrac{\varepsilon}{3}) \text{ et } (|B_n| \leq \tfrac{\varepsilon}{3}) \text{ et } (|C_n| \leq \tfrac{\varepsilon}{3})\Big) \Longrightarrow \Big(|A_n| + |B_n| + |C_n| \leq \varepsilon\Big)$$

Conclusion : $|D_n| > \varepsilon \Longrightarrow |A_n| + |B_n| + |C_n| > \varepsilon \Longrightarrow (|A_n| > \frac{\varepsilon}{3}$ ou $|B_n| > \frac{\varepsilon}{3}$ ou $|C_n| > \frac{\varepsilon}{3})$

Finalement $(|D_n| > \varepsilon) \subset (|A_n| > \frac{\varepsilon}{3}) \cup (|B_n| > \frac{\varepsilon}{3}) \cup (|C_n| > \frac{\varepsilon}{3})$

Or, on sait peut-être que, si A, B, C sont trois événements du même espace probabilisé,
$P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$.
En effet, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$
$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) \leq P(A \cup B) + P(C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$.
Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1, \forall \varepsilon > 0,\ P(|D_n| > \varepsilon) &\leq P\Big((|A_n| > \tfrac{\varepsilon}{3}) \cup (|B_n| > \tfrac{\varepsilon}{3}) \cup (|C_n| > \tfrac{\varepsilon}{3})\Big) \quad \text{par l'inclusion} \\ &\leq P(|A_n| > \tfrac{\varepsilon}{3}) + P(|B_n| > \tfrac{\varepsilon}{3}) + (P|C_n| > \tfrac{\varepsilon}{3})\end{aligned}$$

- A_n B_n et C_n convergent en probabilité vers zéro se traduit par

$\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(|A_n| > \frac{\varepsilon}{3}) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(|B_n| > \frac{\varepsilon}{3}) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(|C_n| > \frac{\varepsilon}{3}) = 0$, donc par l'encadrement $0 \leq P(|D_n| > \varepsilon) \leq P(|A_n| > \frac{\varepsilon}{3}) + P(|B_n| > \frac{\varepsilon}{3})(P|C_n| > \frac{\varepsilon}{3})$, on conclut $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|D_n| > \varepsilon) = 0$

A_n B_n et C_n convergent en probabilité vers zéro implique D_n converge en probabilité vers zéro

4–b)

- $\forall \varepsilon > 0,\ (|V_n| > \varepsilon) = |D_n + u_n - u|) \subset (|D_n| > \frac{\varepsilon}{2}) \cup (|u_n - u| > \frac{\varepsilon}{2})$ d'après le même raisonnement que dans le 4–a).

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - u) = 0$, donc il existe un rang n_0 à partir duquel $|u_n - u| < \frac{\varepsilon}{2}$. .