ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Mardi 4 mai 2004, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$ et on a, en particulier, $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t}\,dt$

1) Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.

2) Calculer u_0 et u_1.

3) a. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \le \ln 2$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4) a. Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.

b. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \ln 2 - u_n \le \frac{1}{n+1}$.

c. Donner la limite de la suite (u_n).

5) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$.

a. Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.

b. Montrer que : $\forall n \geq 2,\ 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$.

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.

On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies, pour tout réel x par $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$ et on rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.

Soit f l'application qui à toute fonction polynomiale P de E associe la fonction $Q = f(P)$, où Q est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2 - x)\, P(x)$.

1) a. Montrer que f est un endomorphisme de E.

b. Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ en fonction de e_0, e_1 et e_2.

c. En déduire que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

d. Montrer sans calcul que f est un automorphisme de E.

2) a. Donner les valeurs propres de f, puis en déduire que f est diagonalisable.

b. Déterminer les sous-espaces propres de f.

3) a. Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la première ligne ne contient que des "1" telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

4) a. Déterminer la matrice P^{-1}.

b. En déduire explicitement, en fonction de n, la matrice A^n.

c. On dit qu' une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M.

On pose $B = \frac{1}{12} A$. Montrer que la suite (B^n) tend vers une matrice J vérifiant $J^2 = J$.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant “pile” avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et “face” également avec la probabilité $\frac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants.

On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun “pile” pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier “pile”.

1) a. Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.

b. Pour tout k de $Z(\Omega)$, calculer $P(Z = k)$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geq 1$.

c. Vérifier que $\sum_{k\in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1$.

d. On rappelle que l'instruction ‘‘random(2)’’ renvoie un nombre au hasard parmi les nombres 0 et 1. Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience décrite ci-dessus, l'entier n étant entré au clavier par l'utilisateur (“pile” sera codé par le nombre 1 et “face” par 0).

```
Program EDHEC2004 ;
var  k, n, z, lancer : integer ;
Begin
 Randomize ;
 Readln(n) ; k : = 0 ; z : = 0 ;
 Repeat
 k : = k + 1 ; lancer : = random(2) ;
 If (lancer = 1) then .......... ;
 until (lancer = 1  or ..........) ;
 Writeln (z) ;
 end.
```

On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, ..., U_n$ telles que pour tout k de $\{0, 1, ..., n\}$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante : si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geq 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages. Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2) Déterminer $X(\Omega)$.

3) a. Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $1 \leq i \leq n$, la probabilité $P(X = i / Z = 0)$.

b. Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $0 \leq i \leq n - 1$, la probabilité $P(X = i / Z = n)$.

c. Pour tout k de $\{ 1, 2, ..., n - 1 \}$ déterminer, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i \leq n$, la probabilité conditionnelle $P(X = i / Z = k)$.

4) a. Montrer que $P(X = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{n-k}{2n})^k + \frac{1}{2^n}$.

b. Montrer que $P(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$.

c. Exprimer, pour tout i de $\{1, 2, ..., n-1\}$, $P(X = i)$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à réduire.

5) Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\sum_{i=0}^{n} P(X = i) = 1$.

Problème

Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.

On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x\, e^{-\frac{n}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a. Montrer que f_n est continue à droite en 0.

b. Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n.

2) a. Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel x non nul, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.

b. Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^-, puis donner le tableau de variation de f_n.

3) a. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.

b. En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$, on a :

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

c. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, (C_n) admet une asymptote "oblique" (D_n) dont on donnera une équation. Préciser la position relative de (D_n) et (C_n) aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

d. Donner l'allure de la courbe (C_1).

4) a. Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.

b. Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est strictement supérieur à 1 et que u_n est solution de

l'équation $x\ln(x) = n$.

c. Étudier la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x\ln x$. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1}, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d. Justifier la relation $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$, puis montrer que $\ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

En déduire un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

5) a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

b. Montrer que : $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

6) On pose $I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)\,dt$.

a. Montrer que : $1 \leq \dfrac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

b. En déduire un équivalent de I_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

c. Montrer alors que la série de terme général I_n est divergente.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2004

EDHEC 2004 VOIE E

CORRIGE

EXERCICE NUMERO 1

1)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto 1 + t + t^n$ est continue et strictement positive sur $[0;1]$, donc $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^n}$ est continue : l'intégrale u_n existe.

2)

$$u_0 = \int_0^1 \frac{dt}{2+t} = \big[\ln|2+t|\big]_0^1 = \ln 3 - \ln 2$$
$$u_1 = \int_0^1 \frac{dt}{1+2t} = \frac{1}{2}\big[\ln|1+2t|\big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3$$

3–a)

On a : $0 \leq t \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq t^{n+1} \leq t^n$ obtenu en multipliant les 3 termes de l'encadrement précédent par $t^n \geq 0$. Donc $0 < 1 + t + t^{n+1} \leq 1 + t + t^n$. On peut passer aux inverses (**inégalités entre nombres strictement positifs**), il vient : $\dfrac{1}{1+t+t^n} \leq \dfrac{1}{1+t+t^{n+1}}$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1 (**les bornes sont dans l'ordre croissant**), on a : $u_n \leq u_{n+1}$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante}}$$

3–b)

On remarque que : $\ln 2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t}$. Or $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0;1],\ 1 + t + t^n \geq 1 + t > 0$, donc en passant aux inverses (inégalités entre nombres strictement positifs), on a :

$\dfrac{1}{1+t+t^n} \leq \dfrac{1}{1+t}$. Intégrons cette inégalité entre 0 et 1 (**les bornes sont dans l'ordre croissant**), on obtient $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n} \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t}$, soit $u_n \leq \ln 2$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ln 2}$$

3–c)

La suite (u_n) est croissante, majorée par $\ln 2$: **d'après le théorème des suites monotones bornées,** on conclut :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

4–a)

$$\begin{aligned}\ln 2 - u_n &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}\right)dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}dt\end{aligned}$$

en vertu de la linéarité de l'intégration.

4–b)

$\forall t \in [0;1]$, $1+t \geq 1$ et $1+t+t^n \geq 1$, donc (inégalités entre nombres strictement positifs), on peut faire le produit de ces inégalités : $(1+t)(1+t+t^n) \geq 1$ et en passant aux inverses : $0 < \dfrac{1}{(1+t)(1+t+t^n)} \leq 1$. Multiplions cet encadrement par $t^n \geq 0$ sur $[0;1]$, il vient : $0 \leq \dfrac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} \leq t^n$.

Intégrons entre 0 et 1 (**les bornes sont dans l'ordre croissant**), on obtient :

$0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}dt \leq \int_0^1 t^n dt$, soit , puisque $\displaystyle\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ln 2 - u_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

4–c) On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. D'après le **théorème d'encadrement** :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2}$$

5–a)

Posons $f_n(t) = \dfrac{1}{1+t+t^n}$. La fonction f_n est continue sur $[1,+\infty[$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. **L'intégrale** $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ **est impropre en** $+\infty$**.**

On a : $f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^n}$; comme les deux fonctions sont **positives** sur $[1,+\infty[$, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n}$ sont de même nature.

D'après le critère de Riemann, $n \geq 2 \Longrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n}$ converge :

$$\boxed{\text{D'après le théorème d'équivalence des fonctions continues, positives, } v_n = \int_1^{+\infty} f_n(t)dt \text{ converge}}$$

5–b)

$\forall t \geq 1,\ 1+t+t^n \geq t^n > 0$ car $1+t \geq 1 > 0$, donc en passant aux inverses (inégalités entre nombres strictement positifs), on a $0 < f_n(t) \leq \dfrac{1}{t^n}$.

Intégrons cet encadrement entre 1 et $+\infty$ (**l'intégration est légitime puisque les deux intégrales sont convergentes**) d'après le **a.** Les bornes sont dans l'ordre croissant, d'où : $0 \leq v_n \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n}$. Calculons cette intégrale.

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n} &= \lim_{x\to+\infty} \int_1^x t^{-n}dt \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{1-n}t^{-n+1}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{x^{n-1}} - 1\right) \\ &= -\frac{1}{1-n} = \frac{1}{n-1}\end{aligned}$$