



**ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD**  
**Concours d'admission sur classes préparatoires**

**MATHEMATIQUES**  
**Option économique**

**Mardi 4 mai 2004, de 8h à 12h**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.  
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.  
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

**Exercice 1**

Le but de cet exercice est de calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$ .

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$  et on a, en particulier,  $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t} dt$

- 1) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , justifier l'existence de  $u_n$ .
- 2) Calculer  $u_0$  et  $u_1$ .
- 3) a. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.  
b. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln 2$ .  
c. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- 4) a. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , écrire  $\ln 2 - u_n$  sous la forme d'une intégrale.  
b. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \ln 2 - u_n \leq \frac{1}{n+1}$ .  
c. Donner la limite de la suite  $(u_n)$ .

- 5) Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on pose  $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$ .
- Justifier la convergence de l'intégrale définissant  $v_n$ .
  - Montrer que :  $\forall n \geq 2, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}$ .
  - En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ , puis donner la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$ .

## Exercice 2

On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.

On note  $e_0, e_1, e_2$  les fonctions définies, pour tout réel  $x$  par  $e_0(x) = 1, e_1(x) = x$  et  $e_2(x) = x^2$  et on rappelle que  $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$  est une base de  $E$ .

Soit  $f$  l'application qui à toute fonction polynomiale  $P$  de  $E$  associe la fonction  $Q = f(P)$ , où  $Q$  est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel  $x$  associe  $(x^2 - x)P(x)$ .

- Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
  - Déterminer  $f(e_0), f(e_1)$  et  $f(e_2)$  en fonction de  $e_0, e_1$  et  $e_2$ .
  - En déduire que la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ .
  - Montrer sans calcul que  $f$  est un automorphisme de  $E$ .
- Donner les valeurs propres de  $f$ , puis en déduire que  $f$  est diagonalisable.
  - Déterminer les sous-espaces propres de  $f$ .
- Justifier l'existence d'une matrice  $P$  inversible dont la première ligne ne contient que

des "1" telle que  $A = PDP^{-1}$ , où  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$ .
- Déterminer la matrice  $P^{-1}$ .
    - En déduire explicitement, en fonction de  $n$ , la matrice  $A^n$ .
    - On dit qu'une suite de matrices  $(M_n)$  tend vers la matrice  $M$ , lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , si chaque coefficient de  $M_n$  tend vers le coefficient situé à la même place dans  $M$ .

On pose  $B = \frac{1}{12}A$ . Montrer que la suite  $(B^n)$  tend vers une matrice  $J$  vérifiant  $J^2 = J$ .

### Exercice 3

On désigne par  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance  $n$  fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant "pile" avec la probabilité  $\frac{1}{2}$  et "face" également avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ ), les lancers étant supposés indépendants.

On note  $Z$  la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun "pile" pendant ces  $n$  lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier "pile".

- 1) a. Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble  $Z(\Omega)$ .
- b. Pour tout  $k$  de  $Z(\Omega)$ , calculer  $P(Z = k)$ . On distinguera les cas  $k = 0$  et  $k \geq 1$ .
- c. Vérifier que  $\sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1$ .
- d. On rappelle que l'instruction "random(2)" renvoie un nombre au hasard parmi les nombres 0 et 1. Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience décrite ci-dessus, l'entier  $n$  étant entré au clavier par l'utilisateur ("pile" sera codé par le nombre 1 et "face" par 0).

```
Program EDHEC2004 ;
var k, n, z, lancer : integer ;
Begin
Randomize ;
Readln(n) ; k := 0 ; z := 0 ;
Repeat
k := k + 1 ; lancer := random(2) ;
If (lancer = 1) then ..... ;
until (lancer = 1 or ..... ) ;
Writeln (z) ;
end.
```

On dispose de  $n+1$  urnes  $U_0, U_1, \dots, U_n$  telles que pour tout  $k$  de  $\{0, 1, \dots, n\}$ , l'urne  $U_k$  contient  $k$  boules blanches et  $n-k$  boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante : si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable  $Z$  prend la valeur  $k$  (avec  $k \geq 1$ ), alors on tire une par une et avec remise,  $k$  boules dans l'urne  $U_k$  et l'on note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages. Si la variable  $Z$  a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et  $X$  prend la valeur 0.

2) Déterminer  $X(\Omega)$ .

- 3) a. Déterminer, en distinguant les cas  $i = 0$  et  $1 \leq i \leq n$ , la probabilité  $P(X = i / Z = 0)$ .
- b. Déterminer, en distinguant les cas  $i = n$  et  $0 \leq i \leq n - 1$ , la probabilité  $P(X = i / Z = n)$ .
- c. Pour tout  $k$  de  $\{1, 2, \dots, n - 1\}$  déterminer, en distinguant les cas  $0 \leq i \leq k$  et  $k < i \leq n$ , la probabilité conditionnelle  $P(X = i / Z = k)$ .

- 4) a. Montrer que  $P(X = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$ .

- b. Montrer que  $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$ .
- c. Exprimer, pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ ,  $P(X = i)$  sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à réduire.
- 5) Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que  $\sum_{i=0}^n P(X = i) = 1$ .

## Problème

Dans ce problème, la lettre  $n$  désigne un entier naturel non nul.

On note  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = x e^{-\frac{n}{x}}$  si  $x \neq 0$  et  $f_n(0) = 0$ .

On note  $(C_n)$  la courbe représentative de  $f_n$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a. Montrer que  $f_n$  est continue à droite en 0.
- b. Montrer que  $f_n$  est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de  $f_n$ .
- 2) a. Montrer que  $f_n$  est dérivable sur  $]-\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ . Pour tout réel  $x$  non nul, calculer  $f_n'(x)$  puis étudier son signe.
- b. Calculer les limites de  $f_n$  en  $+\infty$ ,  $-\infty$  et  $0^-$ , puis donner le tableau de variation de  $f_n$ .
- 3) a. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de  $e^u$  lorsque  $u$  est au voisinage de 0.
- b. En déduire que, lorsque  $x$  est au voisinage de  $+\infty$  ou au voisinage de  $-\infty$ , on a :

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

- c. En déduire qu'au voisinage de  $+\infty$ , ainsi qu'au voisinage de  $-\infty$ ,  $(C_n)$  admet une asymptote "oblique"  $(D_n)$  dont on donnera une équation. Préciser la position relative de  $(D_n)$  et  $(C_n)$  aux voisinages de  $+\infty$  et de  $-\infty$ .
- d. Donner l'allure de la courbe  $(C_1)$ .
- 4) a. Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera  $u_n$ , tel que  $f_n(u_n) = 1$ .
- b. Vérifier que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  est strictement supérieur à 1 et que  $u_n$  est solution de l'équation  $x \ln(x) = n$ .
- c. Étudier la fonction  $g$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $g(x) = x \ln x$ . En déduire, en utilisant la fonction  $g^{-1}$ , que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
- d. Justifier la relation  $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$ , puis montrer que  $\ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$ .

En déduire un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$ .

- 5) a. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est strictement croissante.

b. Montrer que :  $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$ .

6) On pose  $I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t) dt$ .

a. Montrer que :  $1 \leq \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$ .

- b. En déduire un équivalent de  $I_n$  lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$ .
- c. Montrer alors que la série de terme général  $I_n$  est divergente.



## ANNALES DE MATHEMATIQUES 2004

EDHEC 2004 VOIE E

CORRIGE

## EXERCICE NUMERO 1

1) \_\_\_\_\_

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \mapsto 1 + t + t^n$  est continue et strictement positive sur  $[0;1]$ , donc  $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^n}$  est continue : l'intégrale  $u_n$  existe.

2) \_\_\_\_\_

$$u_0 = \int_0^1 \frac{dt}{2+t} = [\ln|2+t|]_0^1 = \ln 3 - \ln 2$$

$$u_1 = \int_0^1 \frac{dt}{1+2t} = \frac{1}{2} [\ln|1+2t|]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3$$

3-a) \_\_\_\_\_

On a :  $0 \leq t \leq 1 \implies 0 \leq t^{n+1} \leq t^n$  obtenu en multipliant les 3 termes de l'encadrement précédent par  $t^n \geq 0$ . Donc  $0 < 1 + t + t^{n+1} \leq 1 + t + t^n$ . On peut passer aux inverses (**inégalités entre nombres strictement positifs**), il vient :  $\frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t+t^{n+1}}$ . En intégrant cette inégalité entre 0 et 1 (**les bornes sont dans l'ordre croissant**), on a :  $u_n \leq u_{n+1}$ .

La suite  $(u_n)$  est croissante

3-b) \_\_\_\_\_

On remarque que :  $\ln 2 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t}$ . Or  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall t \in [0;1]$ ,  $1 + t + t^n \geq 1 + t > 0$ , donc en passant aux inverses (inégalités entre nombres strictement positifs), on a :

$\frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t}$ . Intégrons cette inégalité entre 0 et 1 (**les bornes sont dans**

**l'ordre croissant**), on obtient  $\int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n} \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t}$ , soit  $u_n \leq \ln 2$ .

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln 2$

3-c) \_\_\_\_\_

La suite  $(u_n)$  est croissante, majorée par  $\ln 2$  : **d'après le théorème des suites monotones bornées**, on conclut :

La suite  $(u_n)$  est convergente

4-a)

$$\begin{aligned} \ln 2 - u_n &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n} = \int_0^1 \left( \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} dt \end{aligned}$$

en vertu de la linéarité de l'intégration.

4-b)

$\forall t \in [0; 1]$ ,  $1+t \geq 1$  et  $1+t+t^n \geq 1$ , donc (inégalités entre nombres strictement positifs), on peut faire le produit de ces inégalités :  $(1+t)(1+t+t^n) \geq 1$  et en passant aux inverses :  $0 < \frac{1}{(1+t)(1+t+t^n)} \leq 1$ . Multiplions cet encadrement par  $t^n \geq 0$  sur  $[0; 1]$ , il vient :  $0 \leq \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} \leq t^n$ .

Intégrons entre 0 et 1 (**les bornes sont dans l'ordre croissant**), on obtient :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} dt \leq \int_0^1 t^n dt, \text{ soit, puisque } \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1},$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln 2 - u_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

4-c) On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ . D'après le **théorème d'encadrement** :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2}$$

5-a)

Posons  $f_n(t) = \frac{1}{1+t+t^n}$ . La fonction  $f_n$  est continue sur  $[1, +\infty[$  comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. **L'intégrale**  $v_n = \int_1^{+\infty} f_n(t) dt$  **est impropre en**  $+\infty$ .

On a :  $f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^n}$ ; comme les deux fonctions sont **positives** sur  $[1, +\infty[$ , les intégrales  $\int_1^{+\infty} f_n(t) dt$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n}$  sont de même nature.

D'après le critère de Riemann,  $n \geq 2 \implies \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n}$  converge :

$$\boxed{\text{D'après le théorème d'équivalence des fonctions continues, positives, } v_n = \int_1^{+\infty} f_n(t) dt \text{ converge}}$$

5-b)

$\forall t \geq 1$ ,  $1+t+t^n \geq t^n > 0$  car  $1+t \geq 1 > 0$ , donc en passant aux inverses (inégalités entre nombres strictement positifs), on a  $0 < f_n(t) \leq \frac{1}{t^n}$ .

Intégrons cet encadrement entre 1 et  $+\infty$  (**l'intégration est légitime puisque les deux intégrales sont convergentes**) d'après le **a**. Les bornes sont dans l'ordre croissant, d'où :  $0 \leq v_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n}$ . Calculons cette intégrale.

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x t^{-n} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{1-n} t^{-n+1} \right]_1^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-n} \left( \frac{1}{x^{n-1}} - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{1-n} = \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$