



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur :

ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

CODE ÉPREUVE :

**MATHÉMATIQUES**

298

Option économique

EDHECMATE

Mardi 9 mai 2006 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

## Exercice 1

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note  $I$  la matrice unité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et on pose  $u = (2, 1, -2)$ .

- 1) a) Montrer que  $\text{Ker } f = \text{vect}(u)$ .  
b) La matrice  $A$  est-elle inversible ?
- 2) a) Déterminer le vecteur  $v$  de  $\mathbb{R}^3$ , dont la 2<sup>ème</sup> coordonnée dans  $\mathcal{B}$  vaut 1, et tel que  $f(v) = u$ .  
b) Démontrer que le vecteur  $w$  de  $\mathbb{R}^3$ , dont la 2<sup>ème</sup> coordonnée dans  $\mathcal{B}$  vaut 1, et qui vérifie  $f(w) = v$  est  $w = (0, 1, -1)$ .  
c) Montrer que  $(u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  que l'on notera  $\mathcal{B}'$ . On note  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .
- 3) a) Écrire la matrice  $N$  de  $f$  relativement à la base  $\mathcal{B}'$ . En déduire la seule valeur propre de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?  
b) Donner la relation liant les matrices  $A, N, P$  et  $P^{-1}$ , puis en déduire que, pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 3, on a :  $A^k = 0$ .
- 4) On note  $C_N$  (respectivement  $C_A$ ) l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $N$  (respectivement  $A$ ).  
a) Montrer que  $C_N$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et que  $C_N = \text{vect}(I, N, N^2)$ .  
On admet que  $C_A$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .  
b) Établir que :  $M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N$ . En déduire que  $C_A = \text{vect}(I, A, A^2)$ .  
Quelle est la dimension de  $C_A$  ?

## Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[ \\ \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1) Montrer que  $f$  peut être considérée comme une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire  $X$  définie sur un certain espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et admettant la fonction  $f$  pour densité.

2) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

3) Montrer que  $X$  a une espérance et que celle-ci vaut  $\frac{1}{2}$ .

4) a) Déterminer  $E((X-1)^2)$ .

b) En déduire que  $X$  a une variance et que  $V(X) = \frac{3}{4} - \ln 2$ .

5) On appelle variable indicatrice d'un événement  $A$ , la variable de Bernoulli qui vaut 1 si  $A$  est réalisé et 0 sinon.

On considère maintenant la variable aléatoire  $Y$ , indicatrice de l'événement  $(X \leq \frac{1}{2})$  et la variable aléatoire  $Z$ , indicatrice de l'événement  $(X > \frac{1}{2})$ .

a) Préciser la relation liant  $Y$  et  $Z$  puis établir sans calcul que le coefficient de corrélation linéaire de  $Y$  et  $Z$ , noté  $\rho(Y, Z)$ , est égal à  $-1$ .

b) En déduire la valeur de la covariance de  $Y$  et  $Z$ .

## Exercice 3

Soit  $f$  la fonction définie pour tout couple  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  par :  $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$ .

1) a) Calculer les dérivées partielles premières de  $f$ .

b) En déduire que le seul point critique de  $f$  est  $A = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ .

2) a) Calculer les dérivées partielles secondes de  $f$ .

b) Montrer que  $f$  présente un minimum local en  $A$  et donner la valeur  $m$  de ce minimum.

3) a) Développer  $2(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{2}(y - \frac{1}{6})^2$ .

b) En déduire que  $m$  est le minimum global de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

4) On considère la fonction  $g$  définie pour tout couple  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  par :  $g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$ .

a) Utiliser la question 3) pour établir que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) \geq -\frac{1}{6}$ .

b) En déduire que  $g$  possède un minimum global sur  $\mathbb{R}^2$  et préciser en quel point ce minimum est atteint.

## Problème

### Partie 1 : étude d'une variable discrète sans mémoire.

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète, à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que :  $\forall m \in \mathbb{N}, P(X \geq m) > 0$ .

On suppose également que  $X$  vérifie :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P_{(X \geq m)}(X \geq n+m) = P(X \geq n)$ .

On pose  $P(X=0) = p$  et on suppose que  $p > 0$ .

1) On pose  $q = 1-p$ . Montrer que  $P(X \geq 1) = q$ . En déduire que  $0 < q < 1$ .

2) Montrer que :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P(X \geq n+m) = P(X \geq m)P(X \geq n)$ .

3) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on pose  $u_n = P(X \geq n)$ .

a) Utiliser la relation obtenue à la deuxième question pour montrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique.

b) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , exprimer  $P(X \geq n)$  en fonction de  $n$  et de  $q$ .

c) Établir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n+1)$ .

d) En déduire que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $P(X = n) = q^n p$ .

4) a) Reconnaître la loi suivie par la variable  $X+1$ .

b) En déduire  $E(X)$  et  $V(X)$ .

### Partie 2 : taux de panne d'une variable discrète.

Pour toute variable aléatoire  $Y$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et telle que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $P(Y \geq n) > 0$ , on définit le taux de panne de  $Y$  à l'instant  $n$ , noté  $\lambda_n$ , par :  $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = P_{(Y \geq n)}(Y = n)$ .

1) a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)}$ .

b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \lambda_n = \frac{P(Y \geq n+1)}{P(Y \geq n)}$ .

c) Établir alors que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \lambda_n < 1$ .

d) Montrer par récurrence, que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k)$ .

2) a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = 1 - P(Y \geq n)$ .

b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y \geq n) = 0$ .

c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1 - \lambda_k) = +\infty$ .

d) Conclure quant à la nature de la série de terme général  $\lambda_n$ .

3) a) On considère la déclaration de fonction, en Pascal, rédigée de manière récursive :

```
Function f(n : integer) : integer ;
Begin
If (n = 0) then f := -----
else f := ----- ;
end ;
```

Compléter cete déclaration pour qu'elle renvoie  $n!$  lorsqu'on appelle  $f(n)$ .

b) On considère la déclaration de fonction récursive suivante :

```
Function  $g(a : \text{real} ; n : \text{integer}) : \text{real} ;$   
Begin  
If  $(n = 0)$  then  $g := 1$   
    else  $g := a * g(a, n-1)$  ;  
end ;
```

Dire quel est le résultat retourné à l'appel de  $g(a, n)$ .

c) Proposer un programme (sans écrire la partie déclarative) utilisant ces deux fonctions et permettant d'une part le calcul de la somme  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$  et d'autre part, à l'aide du résultat de la question 1a), le calcul et l'affichage du taux de panne à l'instant  $n$  d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $a > 0$ , lorsque  $n$  et  $a$  sont entrés au clavier par l'utilisateur (on supposera  $n \geq 1$ ).

d) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle renvoie la valeur de  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$  à l'appel de  $sigma(a, n)$ .

```
Function  $sigma(a : \text{real} ; n : \text{integer}) : \text{real} ;$   
var  $k : \text{integer} ;$   
     $p : \text{real} ;$   
Begin  
     $p := 1 ; s := 1 ;$   
    For  $k := 1$  to  $n-1$  do begin  $p := p * a / k ; s := \dots ;$  end ;  
     $s := \dots ;$   
     $sigma := s ;$   
end ;
```

### Partie 3 : caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de $X$ .

1) Déterminer le taux de panne de la variable  $X$  dont la loi a été trouvée à la question 3d) de la partie 1.

2) On considère une variable aléatoire  $Z$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , et vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z \geq n) > 0$ . On suppose que le taux de panne de  $Z$  est constant, c'est-à-dire que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \lambda$ .

a) Montrer que  $0 < \lambda < 1$ .

b) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , déterminer  $P(Z \geq n)$  en fonction de  $\lambda$  et  $n$ .

c) Conclure que les seules variables aléatoires  $Z$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , dont le taux de panne est constant et telles que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $P(Z \geq n) > 0$ , sont les variables dont la loi est du type de celle de  $X$ .



## ANNALES DE MATHEMATIQUES 2006

EDHEC VOIE E 2006

CORRIGE

## PREMIER EXERCICE

1-a)

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in \text{Ker } f &\iff \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 2x + 10y + 7z = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \\ -2x - 8y - 6z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 2x + 10y + 7z = 0 \\ 2y + z = 0 & L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ 2y + z = 0 & L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} z = -2y & \text{d'après } L_2 \text{ et } L_3 \\ x = 2y & \text{d'après } L_1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ker } f &= \{(2y, y, -2y) \in \mathbb{R}^3, y \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{y(2, 1, -2), y \in \mathbb{R}\}
 \end{aligned}$$

$$\text{Ker } f = \text{vect}(u) \text{ avec } u = (2, 1, -2)$$

1-b)

$$\begin{aligned}
 \text{Ker } f \neq \{(0, 0, 0)\} &\iff f \text{ n'est pas injective} \\
 &\iff f \text{ n'est pas bijective : endomorphisme en dimension finie} \\
 &\iff A \text{ n'est pas inversible}
 \end{aligned}$$

2-a)

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ 

$$\begin{aligned}
 u = f(x, y, z) &\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 2x + 10y + 7z = 2 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ -2x - 8y - 6z = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Effectuons les mêmes opérations sur les lignes que dans la question précédente ; on trouve :

$$\begin{cases} 2x + 10y + 7z = 2 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -2y \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

L'ensemble des antécédents de  $u$  est donc  $\{(2y + 1, y, -2y) \in \mathbb{R}^3, y \in \mathbb{R}\}$ . L'antécédent de  $u$  dont la deuxième coordonnée est 1 est  $v = (3, 1, -2)$

**2-b)**

Cherchons maintenant l'ensemble des antécédents de  $v$ . Les coordonnées  $(x, y, z)$  vérifient le système :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + 10y + 7z = 3 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ -2x - 8y - 6z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 10y + 7z = 3 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

(On a encore fait les mêmes opérations qu'au a))

Finalement,  $\begin{cases} z = -2y + 1 \\ x = 2y - 2 \end{cases}$ , l'ensemble des antécédents de  $v$  est

$$\{(2y - 2, y, -2y + 1) \in \mathbb{R}^3, y \in \mathbb{R}\}$$

L'antécédent dont la deuxième coordonnée est 1 est

$$w = (0, 1, -1)$$

**2-c)**

Supposons  $xu + yv + zw = (0, 0, 0)$  (\*) avec  $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$

$$(*) \implies \begin{cases} xu + yv + zw = (0, 0, 0) \\ f(xu + yv + zw) = f(0, 0, 0) \\ f^2(xu + yv + zw) = f^2(0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} xu + yv + zw = (0, 0, 0) \\ xf(u) + yf(v) + zf(w) = (0, 0, 0) \\ xf^2(u) + yf^2(v) + zf^2(w) = (0, 0, 0) \end{cases} \quad \text{car } f \text{ est linéaire ainsi que } f^2$$

$$\implies \begin{cases} xu + yv + zw = (0, 0, 0) \\ yu + zv = (0, 0, 0) \\ zu = (0, 0, 0) \end{cases}$$

car  $f(u) = (0, 0, 0)$ ,  $f(v) = u$  et  $f(w) = v$ ;  $f^2(u) = (0, 0, 0)$ ,  $f^2(v) = f(u) = (0, 0, 0)$  et  $f^2(w) = f(v) = u$ .

La dernière équation donne  $z = 0$  car  $u \neq (0, 0, 0)$

La deuxième équation donne alors  $yu = (0, 0, 0)$ , donc  $y = 0$  pour la même raison, puis la première équation donne  $x = 0$

La famille  $(u, v, w)$  est une famille libre de 3 vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$  qui est un espace de dimension 3, c'est donc une base de  $\mathbb{R}^3$ , notée  $B'$

**3-a)**

La matrice  $N$  est obtenue en écrivant en colonnes les coordonnées de  $f(u), f(v), f(w)$  dans la base  $B' = (u, v, w)$ .

$f(u) = (0, 0, 0) = 0u + 0v + 0w$ ;  $f(v) = u = 1.u + 0v + 0w$  et  $f(w) = v = 0u + 1.v + 0w$ ; ce qui donne

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $N$  est triangulaire, ses valeurs propres sont ses termes diagonaux; il n'y a que 0. La matrice  $N$  est la matrice de  $f$  dans la base  $(u, v, w)$ , donc les valeurs propres de  $f$  sont

celles de  $N$  :  $\text{spect}(f) = \{0\}$

• Raisonnons par l'absurde : si  $f$  était diagonalisable, il existerait une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  serait la matrice diagonale ne comportant que des 0, ce serait la matrice nulle. Donc  $f$  serait l'endomorphisme nul et l'on sait que dans n'importe quelle base