MATHEMATIQUES E.M.LYON Voie Eco 2004

PREMIER EXERCICE

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}$$

1. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ comprenant les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. a) Établir, pour tout $t \in [0, +\infty[$: $\quad 2e^t - t - t^2 > 0 \quad$ et $\quad 1 + t \geq \sqrt{1+t^2}$

   b) En déduire:
$$\forall t \in [0, +\infty[\,, \quad f(t) > t$$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = f(u_n)$$

   a) Établir que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   b) Écrire un programme en Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier n tel que $u_n > 10^6$

4. On considère l'application $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$G(x) = \int_{-x}^{+x} f(t)\, dt$$

   a) Montrer que G est impaire.

   b) Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   c) Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

   d) Étudier le sens de variation de G et dresser le tableau de variation de G sur $\mathbb{R}$ comprenant les limites de G en $-\infty$ et en $+\infty$.

DEUXIÈME EXERCICE

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,;\, AM = M\} \\ E_2(A) &= \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,;\, A^2M = AM\right\} \end{aligned}$$

Partie I

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

   On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

2. a) Établir : $\quad E_1(A) \subset E_2(A)$

   b) Montrer que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$

3. a) Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$

   b) Un exemple : Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de C.
2. En déduire une matrice diagonale D, dont les termes diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P, dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, telles que $C = P\,D\,P^{-1}$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.

   Montrer : $\quad M \in E_1(C) \Longleftrightarrow N \in E_1(D)$.
4. Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.
6. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_2(C)$.

   Est-ce que $E_1(C) = E_2(C)$?

TROISIÈME EXERCICE

Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes.

- La proportion de boules blanches est b.
- La proportion de boules rouges est r.
- La proportion de boules vertes est v.

Ainsi, on a.: $0 < b < l, \quad 0 < r < l, \quad 0 < v < 1 \quad$ avec $\quad b + r + v = 1$.
On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.
Pour tout entier naturel i supérieur ou égal à l, on note B_i (respectivement R_i ; V_i) l'événement " la i-ème boule tirée est blanche (respectivement, rouge ; verte)"
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Par exemple, lorsque le résultat des tirages est V_1, V_2, B_3, la variable aléatoire X prend la valeur 3.

Partie I

1. Préciser les valeurs possibles de X.
2. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \quad P(X = k) = (1 - b)\,b^{k-1} + (1 - r)\,r^{k-1} + (1 - v)\,v^{k-1}$
3. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{1}{1 - b} + \frac{1}{1 - r} + \frac{1}{1 - v} - 2$$

Partie II

On considère la fonction f de classe C^2 sur $]0,1[\times]0,1[$ définie par :

$$\forall (x,y)\in]0,1[\times]0,1[\,,\ f(x,y)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y}$$

1. Calculer, pour tout $(x,y)\in]0,1[\times]0,1[\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

2. Montrer qu'il existe un unique point I de $]0,1[\times]0,1[$ en lequel f est susceptible de posséder un extremum local et déterminer I.

3. Montrer que f admet en I un minimum local.

4. a) Exprimer $E(X)$ en fonction de $f(b,r)$.

   b) Que peut-on dire de $E(X)$ lorsque $b=r=v=\dfrac{1}{3}$?

Partie III

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{3^t}\,dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

   On rappelle que $3^t=e^{t\ln(3)}$.

   On note $\alpha=\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{3^t}\,dt$ et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(t)=0 & \text{si } t\in\,]-\infty;2[\\ g(t)=\dfrac{1}{\alpha 3^t} & \text{si } t\in[2;+\infty[\end{cases}$$

2. Vérifier que g est une densité de probabilité.

   On note Y une variable aléatoire admettant g comme densité.

3. Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

4. On note Z la variable aléatoire égale à la partie entière de Y. On rappelle que la partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

   a) Déterminer la loi de probabilité de Z.

   b) Comparer la loi de probabilité de X lorsque $b=r=v=\dfrac{1}{3}$ et la loi de probabilité de Z.

-FIN -

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2004

EM-LYON 2004 VOIE E

CORRIGE

PREMIER EXERCICE

1.

$t \mapsto 1+t^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc par composition $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, $t \mapsto e^t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $t \mapsto \dfrac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ **dont le dénominateur ne s'annule pas**.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) &= 2\frac{\sqrt{1+t^2}.e^t - e^t\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}\\ &= \frac{2e^t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\left(1+t^2-t\right)\end{aligned}$$

Le trinôme t^2-t+1 ne s'annule jamais (son discriminant vaut -3) : il garde un signe constant, celui du coefficient de t^2 : $\forall t \in \mathbb{R},\ t^2-t+1>0$. Il s'ensuit que $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t)>0$.

* $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{-t}=0$ et $\lim\limits_{t\to-\infty}\sqrt{1+t^2}=+\infty$ implique $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)=0$.

* $1+t^2 \underset{(+\infty)}{\sim} t^2$, donc $\sqrt{1+t^2} \underset{(+\infty)}{\sim} \sqrt{t^2}$, soit $\sqrt{1+t^2} \underset{(+\infty)}{\sim} t$. On obtient $f(t) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{2e^t}{t}$.

D'après **les croissances comparées** $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2e^t}{t}=+\infty$, donc par équivalence $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$. On obtient le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		$+\infty$
$f(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2.

a) • Posons $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \varphi(t)=2e^t-t-t^2$. Cette fonction φ est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}^+$, donc

$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \varphi'(t)=2e^t-1-2t$ et $\varphi''(t)=2(e^t-1)$. On sait que $t \geq 0 \Longrightarrow e^t \geq 1$, donc $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \varphi''(t)\geq 0$; il en résulte que φ' est croissante, ce qui permet de dresser les tableaux suivants :

t	0		$+\infty$
φ'	1	$\nearrow$	
φ	2	$\nearrow$	

car il est clair, d'après la variation de φ , que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \varphi'(t) > 0$. D'après le tableau de variations de φ :

$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \varphi(t) \geq 2$, donc $\varphi(t) > 0$: $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ 2e^t - t - t^2 > 0}$

- $\forall t \geq 0,\ 2t \geq 0$, donc $1+2t+t^2 \geq 1+t^2$, soit $(1+t)^2 \geq 1+t^2$. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc $\sqrt{(1+t)^2} \geq \sqrt{1+t^2}$. Mais $\sqrt{(1+t)^2} = |1+t| = 1+t$ puisque sur $\mathbb{R}^+,\ 1+t > 0$. On obtient alors :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+,\ 1+t \geq \sqrt{(1+t)^2}}$$

b) $1+t \geq \sqrt{1+t^2} > 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \geq \dfrac{1}{1+t}$; multiplions les deux termes de cette inégalité par $2e^t > 0$, il vient $\dfrac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} \geq \dfrac{2e^t}{1+t}$; ajoutons $-t$ aux deux membres de cette inégalité , on a : $\dfrac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} - t \geq \dfrac{2e^t}{1+t} - t$, soit $f(t) - t \geq \dfrac{2e^t - t(1+t)}{1+t}$ et finalement : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) - t \geq \dfrac{2e^t - t - t^2}{1+t}$.

D'après le **a)**, on sait que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ 2e^t - t - t^2 > 0$, donc (puisque $1+t > 0$), $\dfrac{2e^t - t - t^2}{1+t} > 0$.

> En résumé :
> $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) - t \geq \dfrac{2e^t - t - t^2}{1+t}$ et $\dfrac{2e^t - t - t^2}{1+t} > 0$
> impliquent $f(t) - t > 0$, soit $f(t) > t$.

3.

a)

- Une récurrence sans difficulté montre que $\forall n \geq 0,\ u_n \geq 0$.
- Dans ces conditions, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$ d'après la question **2. b)**, ce qui veut dire que la suite (u_n) est strictement croissante.

Pour une suite strictement croissante, on sait qu'il n'y a que deux possibilités : soit elle converge, soit elle a pour limite $+\infty$.

Raisonnons par l'absurde : si la suite (u_n) convergeait vers un réel ℓ, d'après la compatibilité de la limite avec l'ordre on aurait : $u_n > 0 \Longrightarrow \ell \geq 0$. De plus, f étant continue sur $\mathbb{R}$ (car elle y est dérivable) et $u_{n+1} = f(u_n)$, on sait que ℓ serait solution de l'équation $f(\ell) = \ell$. Or sur $\mathbb{R}^+$ cette équation n'a pas de solution d'après la question **2. b)**. Il y a là une contradiction.

> **Conclusion** : la suite (u_n) ne converge pas, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

b) PROGRAM LYON ;

```
var n : integer ;
  u : real ;
function f(t : real) :real ;
var y : real ;
begin
y:= 2 × exp(t)/sqrt(1+sqr(t)) ;    f:=y ;
end ;
BEGIN
n:=0 ; u:=1 ;
```