# MATHEMATIQUES E.M.LYON Voie Eco 2004

## PREMIER EXERCICE

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}$$

1. Dresser le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$ comprenant les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Établir, pour tout $t \in [0, +\infty[$ : $\quad 2e^t - t - t^2 > 0 \quad$ et $\quad 1 + t \geq \sqrt{1+t^2}$
   b) En déduire:
   $$\forall t \in [0, +\infty[\,, \quad f(t) > t$$
3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
   $$u_{n+1} = f(u_n)$$
   a) Établir que $u_n$ tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
   b) Écrire un programme en Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier $n$ tel que $u_n > 10^6$
4. On considère l'application $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
   $$G(x) = \int_{-x}^{+x} f(t)\,dt$$
   a) Montrer que $G$ est impaire.
   b) Montrer que $G$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   c) Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ?
   d) Étudier le sens de variation de $G$ et dresser le tableau de variation de $G$ sur $\mathbb{R}$ comprenant les limites de $G$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

## DEUXIÈME EXERCICE

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, $I$ la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $0$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On considère, pour toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,;\, A\,M = M\} \\ E_2(A) &= \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,;\, A^2 M = AM\right\} \end{aligned}$$

**Partie I**

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
2. a) Établir : $\quad E_1(A) \subset E_2(A)$
   b) Montrer que, si $A$ est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$

3. a) Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$

   b) Un exemple : Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$

**Partie II**

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $C$.
2. En déduire une matrice diagonale $D$, dont les termes diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible $P$, dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, telles que $C = P\,D\,P^{-1}$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.

   Montrer : $\quad M \in E_1(C) \Longleftrightarrow N \in E_1(D)$.
4. Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels $a$, $b$, $c$ tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.
6. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_2(C)$.

   Est-ce que $E_1(C) = E_2(C)$ ?

# TROISIÈME EXERCICE

Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes.

- La proportion de boules blanches est $b$.
- La proportion de boules rouges est $r$.
- La proportion de boules vertes est $v$.

Ainsi, on a.: $0 < b < l, \quad 0 < r < l, \quad 0 < v < 1 \quad$ avec $\quad b + r + v = 1$.
On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.
Pour tout entier naturel $i$ supérieur ou égal à l, on note $B_i$ (respectivement $R_i$ ; $V_i$ ) l'événement " la $i$-ème boule tirée est blanche (respectivement, rouge ; verte)"
On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Par exemple, lorsque le résultat des tirages est $V_1, V_2, B_3$, la variable aléatoire $X$ prend la valeur 3.

**Partie I**

1. Préciser les valeurs possibles de $X$.
2. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N} - \{0,1\}, \quad P(X = k) = (1-b)\,b^{k-1} + (1-r)\,r^{k-1} + (1-v)\,v^{k-1}$
3. Montrer que la variable aléatoire $X$ admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2$$

## Partie II

On considère la fonction $f$ de classe $C^2$ sur $]0,1[\times]0,1[$ définie par :

$$\forall (x,y) \in ]0,1[\times]0,1[\,,\ f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$$

1. Calculer, pour tout $(x,y) \in ]0,1[\times]0,1[$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
2. Montrer qu'il existe un unique point $I$ de $]0,1[\times]0,1[$ en lequel $f$ est susceptible de posséder un extremum local et déterminer $I$.
3. Montrer que $f$ admet en $I$ un minimum local.
4. a) Exprimer $E(X)$ en fonction de $f(b,r)$.

   b) Que peut-on dire de $E(X)$ lorsque $b = r = v = \dfrac{1}{3}$ ?

## Partie III

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

   On rappelle que $3^t = e^{t\ln(3)}$.

   On note $\alpha = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,dt$ et on considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t \in ]-\infty;2[ \\ g(t) = \dfrac{1}{\alpha 3^t} & \text{si } t \in [2;+\infty[ \end{cases}$$

2. Vérifier que $g$ est une densité de probabilité.

   On note $Y$ une variable aléatoire admettant $g$ comme densité.
3. Montrer que $Y$ admet une espérance et calculer cette espérance.
4. On note $Z$ la variable aléatoire égale à la partie entière de $Y$. On rappelle que la partie entière d'un nombre réel $x$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $x$.

   a) Déterminer la loi de probabilité de $Z$.

   b) Comparer la loi de probabilité de $X$ lorsque $b = r = v = \dfrac{1}{3}$ et la loi de probabilité de $Z$.

-FIN -

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2004

# EM-LYON 2004 VOIE E

# CORRIGE

## PREMIER EXERCICE

**1.**

$t \mapsto 1+t^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ , $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc par composition $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, $t \mapsto e^t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $t \mapsto \dfrac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ **dont le dénominateur ne s'annule pas**.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = 2\frac{\sqrt{1+t^2}.e^t - e^t\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{2e^t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\Big(1+t^2-t\Big)$$

Le trinôme $t^2-t+1$ ne s'annule jamais (son discriminant vaut $-3$) : il garde un signe constant, celui du coefficient de $t^2$ : $\forall t \in \mathbb{R},\ t^2-t+1 > 0$. Il s'ensuit que $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) > 0$.

* $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{-t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} \sqrt{1+t^2} = +\infty$ implique $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 0$.

* $1+t^2 \underset{(+\infty)}{\sim} t^2$, donc $\sqrt{1+t^2} \underset{(+\infty)}{\sim} \sqrt{t^2}$, soit $\sqrt{1+t^2} \underset{(+\infty)}{\sim} t$. On obtient $f(t) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{2e^t}{t}$.

D'après **les croissances comparées** $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{2e^t}{t} = +\infty$, donc par équivalence $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$. On obtient le tableau de variations suivant :

| $t$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**2.**

**a)** • Posons $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \varphi(t) = 2e^t - t - t^2$. Cette fonction $\varphi$ est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}^+$, donc

$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \varphi'(t) = 2e^t - 1 - 2t$ et $\varphi''(t) = 2(e^t - 1)$. On sait que $t \geq 0 \Longrightarrow e^t \geq 1$, donc $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \varphi''(t) \geq 0$ ; il en résulte que $\varphi'$ est croissante, ce qui permet de dresser les tableaux suivants :

| $t$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi'$ | $1$ | $\nearrow$ | |
| $\varphi$ | $2$ | $\nearrow$ | |


Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

car il est clair, d'après la variation de $\varphi$ , que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \varphi'(t) > 0$ . D'après le tableau de variations de $\varphi$ :

$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \varphi(t) \geq 2$, donc $\varphi(t) > 0$ : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ 2e^t - t - t^2 > 0}$

- $\forall t \geq 0,\ 2t \geq 0$, donc $1+2t+t^2 \geq 1+t^2$, soit $(1+t)^2 \geq 1+t^2$. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc $\sqrt{(1+t)^2} \geq \sqrt{1+t^2}$. Mais $\sqrt{(1+t)^2} = |1+t| = 1+t$ puisque sur $\mathbb{R}^+,\ 1+t > 0$. On obtient alors :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+,\ 1+t \geq \sqrt{(1+t)^2}}$$

**b)** $1+t \geq \sqrt{1+t^2} > 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \geq \dfrac{1}{1+t}$ ; multiplions les deux termes de cette inégalité par $2e^t > 0$, il vient $\dfrac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} \geq \dfrac{2e^t}{1+t}$ ; ajoutons $-t$ aux deux membres de cette inégalité , on a : $\dfrac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} - t \geq \dfrac{2e^t}{1+t} - t$, soit $f(t) - t \geq \dfrac{2e^t - t(1+t)}{1+t}$ et finalement : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) - t \geq \dfrac{2e^t - t - t^2}{1+t}$.

D'après le **a)**, on sait que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ 2e^t - t - t^2 > 0$, donc (puisque $1+t > 0$), $\dfrac{2e^t - t - t^2}{1+t} > 0$.

> En résumé :
> $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) - t \geq \dfrac{2e^t - t - t^2}{1+t}$ et $\dfrac{2e^t - t - t^2}{1+t} > 0$
> impliquent $f(t) - t > 0$, soit $f(t) > t$.

**3.**

**a)**

- Une récurrence sans difficulté montre que $\forall n \geq 0,\ u_n \geq 0$.
- Dans ces conditions, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$ d'après la question **2. b)**, ce qui veut dire que la suite $(u_n)$ est strictement croissante.

**Pour une suite strictement croissante, on sait qu'il n'y a que deux possibilités : soit elle converge, soit elle a pour limite $+\infty$.**

Raisonnons par l'absurde : si la suite $(u_n)$ convergeait vers un réel $\ell$, d'après la compatibilité de la limite avec l'ordre on aurait : $u_n > 0 \Longrightarrow \ell \geq 0$. De plus, $f$ étant continue sur $\mathbb{R}$ (car elle y est dérivable) et $u_{n+1} = f(u_n)$, on sait que $\ell$ serait solution de l'équation $f(\ell) = \ell$. Or sur $\mathbb{R}^+$ cette équation n'a pas de solution d'après la question **2. b)**. Il y a là une contradiction.

> **Conclusion** : la suite $(u_n)$ ne converge pas, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

**b)**
```
PROGRAM LYON ;
var n : integer ;
   u : real ;
function f(t : real) :real ;
var y : real ;
begin
y:= 2 × exp(t)/sqrt(1+sqr(t)) ;    f:=y ;
end ;
BEGIN
n:=0 ; u:=1 ;
```