



## PREMIER EXERCICE

On considère l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par :

$$f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}$$

1. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  comprenant les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

2. a) Établir, pour tout  $t \in [0, +\infty[$  :  $2e^t - t - t^2 > 0$  et  $1+t \geq \sqrt{1+t^2}$

b) En déduire:

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad f(t) > t$$

3. On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Établir que  $u_n$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

b) Écrire un programme en Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n > 10^6$

4. On considère l'application  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$G(x) = \int_{-x}^{+x} f(t) dt$$

a) Montrer que  $G$  est impaire.

b) Montrer que  $G$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $G'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

c) Quelle est la limite de  $G(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ?

d) Étudier le sens de variation de  $G$  et dresser le tableau de variation de  $G$  sur  $\mathbb{R}$  comprenant les limites de  $G$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

## DEUXIÈME EXERCICE

On note  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels,  $I$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  $0$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

On considère, pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , les ensembles  $E_1(A)$  et  $E_2(A)$  suivants :

$$E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; AM = M\}$$

$$E_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; A^2M = AM\}$$

### Partie I

1. Montrer que  $E_1(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On admettra que  $E_2(A)$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

2. a) Établir :  $E_1(A) \subset E_2(A)$

b) Montrer que, si  $A$  est inversible, alors  $E_1(A) = E_2(A)$

3. a) Établir que, si  $A - I$  est inversible, alors  $E_1(A) = \{0\}$
- b) Un exemple : Soit  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $E_1(B)$  et  $E_2(B)$

## Partie II

On considère la matrice  $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

- Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $C$ .
- En déduire une matrice diagonale  $D$ , dont les termes diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible  $P$ , dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, telles que  $C = P D P^{-1}$ .
- Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On note  $N = P^{-1}M$ .  
Montrer :  $M \in E_1(C) \iff N \in E_1(D)$ .
- Montrer que  $N \in E_1(D)$  si et seulement s'il existe trois réels  $a, b, c$  tels que  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- En déduire l'expression générale des matrices de  $E_1(C)$  et déterminer une base et la dimension de  $E_1(C)$ .
- Donner l'expression générale des matrices de  $E_2(C)$  et déterminer une base et la dimension de  $E_2(C)$ .  
Est-ce que  $E_1(C) = E_2(C)$  ?

## TROISIÈME EXERCICE

Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes.

- La proportion de boules blanches est  $b$ .
- La proportion de boules rouges est  $r$ .
- La proportion de boules vertes est  $v$ .

Ainsi, on a :  $0 < b < 1$ ,  $0 < r < 1$ ,  $0 < v < 1$  avec  $b + r + v = 1$ .

On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.

Pour tout entier naturel  $i$  supérieur ou égal à 1, on note  $B_i$  (respectivement  $R_i$  ;  $V_i$ ) l'événement " la  $i$ -ème boule tirée est blanche (respectivement, rouge ; verte) "

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Par exemple, lorsque le résultat des tirages est  $V_1, V_2, B_3$ , la variable aléatoire  $X$  prend la valeur 3.

### Partie I

- Préciser les valeurs possibles de  $X$ .
- Montrer :  $\forall k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ ,  $P(X = k) = (1 - b) b^{k-1} + (1 - r) r^{k-1} + (1 - v) v^{k-1}$
- Montrer que la variable aléatoire  $X$  admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2$$

## Partie II

On considère la fonction  $f$  de classe  $C^2$  sur  $]0, 1[ \times ]0, 1[$  définie par :

$$\forall (x, y) \in ]0, 1[ \times ]0, 1[, f(x, y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$$

1. Calculer, pour tout  $(x, y) \in ]0, 1[ \times ]0, 1[$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .
2. Montrer qu'il existe un unique point  $I$  de  $]0, 1[ \times ]0, 1[$  en lequel  $f$  est susceptible de posséder un extremum local et déterminer  $I$ .
3. Montrer que  $f$  admet en  $I$  un minimum local.
4. a) Exprimer  $E(X)$  en fonction de  $f(b, r)$ .  
b) Que peut-on dire de  $E(X)$  lorsque  $b = r = v = \frac{1}{3}$  ?

## Partie III

1. Montrer que l'intégrale  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$  est convergente et déterminer sa valeur.

On rappelle que  $3^t = e^{t \ln(3)}$ .

On note  $\alpha = \int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$  et on considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t \in ]-\infty; 2[ \\ g(t) = \frac{1}{\alpha 3^t} & \text{si } t \in [2; +\infty[ \end{cases}$$

2. Vérifier que  $g$  est une densité de probabilité.  
On note  $Y$  une variable aléatoire admettant  $g$  comme densité.
3. Montrer que  $Y$  admet une espérance et calculer cette espérance.
4. On note  $Z$  la variable aléatoire égale à la partie entière de  $Y$ . On rappelle que la partie entière d'un nombre réel  $x$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ .
  - a) Déterminer la loi de probabilité de  $Z$ .
  - b) Comparer la loi de probabilité de  $X$  lorsque  $b = r = v = \frac{1}{3}$  et la loi de probabilité de  $Z$ .

-FIN -



## ANNALES DE MATHÉMATIQUES 2004

## EM-LYON 2004 VOIE E

## CORRIGE

## PREMIER EXERCICE

1. \_\_\_\_\_  
 $t \mapsto 1+t^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (fonction polynomiale) et à valeurs dans  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $t \mapsto \sqrt{t}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , donc par composition  $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^{+*}$ . De plus,  $t \mapsto e^t$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc  $t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  dont le dénominateur ne s'annule pas.

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) &= 2 \frac{\sqrt{1+t^2} \cdot e^t - e^t \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} \\ &= \frac{2e^t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} (1+t^2 - t) \end{aligned}$$

Le trinôme  $t^2 - t + 1$  ne s'annule jamais (son discriminant vaut  $-3$ ) : il garde un signe constant, celui du coefficient de  $t^2$  :  $\forall t \in \mathbb{R}, t^2 - t + 1 > 0$ . Il s'ensuit que  $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) > 0$ .

\*  $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t} = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \sqrt{1+t^2} = +\infty$  implique  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$ .

\*  $1+t^2 \underset{(+\infty)}{\sim} t^2$ , donc  $\sqrt{1+t^2} \underset{(+\infty)}{\sim} \sqrt{t^2}$ , soit  $\sqrt{1+t^2} \underset{(+\infty)}{\sim} t$ . On obtient  $f(t) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2e^t}{t}$ .

D'après les croissances comparées  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2e^t}{t} = +\infty$ , donc par équivalence  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ . On obtient le tableau de variations suivant :

$t$	$-\infty$	$+\infty$
$f(t)$	0	$+\infty$

2. \_\_\_\_\_

a) • Posons  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \varphi(t) = 2e^t - t - t^2$ . Cette fonction  $\varphi$  est évidemment dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ , donc

$\forall t \in \mathbb{R}^+, \varphi'(t) = 2e^t - 1 - 2t$  et  $\varphi''(t) = 2(e^t - 1)$ . On sait que  $t \geq 0 \implies e^t \geq 1$ , donc  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \varphi''(t) \geq 0$  ; il en résulte que  $\varphi'$  est croissante, ce qui permet de dresser les tableaux suivants :

$t$	0	$+\infty$
$\varphi'$	1	$\nearrow$
$\varphi$	2	$\nearrow$

car il est clair, d'après la variation de  $\varphi$ , que  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\varphi'(t) > 0$ . D'après le tableau de variations de  $\varphi$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \varphi(t) \geq 2, \text{ donc } \varphi(t) > 0 : \quad \boxed{\forall t \in \mathbb{R}, 2e^t - t - t^2 > 0}$$

•  $\forall t \geq 0, 2t \geq 0$ , donc  $1+2t+t^2 \geq 1+t^2$ , soit  $(1+t)^2 \geq 1+t^2$ . La fonction racine carrée est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ , donc  $\sqrt{(1+t)^2} \geq \sqrt{1+t^2}$ . Mais  $\sqrt{(1+t)^2} = |1+t| = 1+t$  puisque sur  $\mathbb{R}^+$ ,  $1+t > 0$ . On obtient alors :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, 1+t \geq \sqrt{1+t^2}}$$

b)  $1+t \geq \sqrt{1+t^2} > 0 \implies \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \geq \frac{1}{1+t}$  ; multiplions les deux termes de cette inégalité par  $2e^t > 0$ , il vient  $\frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} \geq \frac{2e^t}{1+t}$  ; ajoutons  $-t$  aux deux membres de cette inégalité, on a :  $\frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} - t \geq \frac{2e^t}{1+t} - t$ , soit  $f(t) - t \geq \frac{2e^t - t(1+t)}{1+t}$  et finalement :  $\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) - t \geq \frac{2e^t - t - t^2}{1+t}$ .

D'après le a), on sait que  $\forall t \in \mathbb{R}^+, 2e^t - t - t^2 > 0$ , donc (puisque  $1+t > 0$ ),  $\frac{2e^t - t - t^2}{1+t} > 0$ .

En résumé :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) - t \geq \frac{2e^t - t - t^2}{1+t} \text{ et } \frac{2e^t - t - t^2}{1+t} > 0}$$

impliquent  $f(t) - t > 0$ , soit  $f(t) > t$ .

3. \_\_\_\_\_

a)

- Une récurrence sans difficulté montre que  $\forall n \geq 0, u_n \geq 0$ .
- Dans ces conditions,  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$  d'après la question 2. b), ce qui veut dire que la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

**Pour une suite strictement croissante, on sait qu'il n'y a que deux possibilités : soit elle converge, soit elle a pour limite  $+\infty$ .**

Raisonnons par l'absurde : si la suite  $(u_n)$  convergerait vers un réel  $\ell$ , d'après la compatibilité de la limite avec l'ordre on aurait :  $u_n > 0 \implies \ell \geq 0$ . De plus,  $f$  étant continue sur  $\mathbb{R}$  (car elle y est dérivable) et  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on sait que  $\ell$  serait solution de l'équation  $f(\ell) = \ell$ . Or sur  $\mathbb{R}^+$  cette équation n'a pas de solution d'après la question 2. b). Il y a là une contradiction.

**Conclusion** : la suite  $(u_n)$  ne converge pas, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

b) PROGRAM LYON ;

var n : integer ;

u : real ;

function f(t : real) : real ;

var y : real ;

begin

y := 2 \* exp(t)/sqrt(1+sqr(t)) ; f:=y ;

end ;

BEGIN

n:=0 ; u:=1 ;