BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Mardi 6 mai 2008 de 8h à 12h

Code sujet
297
EDHECMATS

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

1) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$, élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels x et y pour que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Dans la suite, X et Y sont des variables aléatoires réelles, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$. On note F_X (respectivement F_Y) la fonction de répartition de X (respectivement Y).

a) Déterminer une densité de X^2 (on ne demande pas de vérifier que X^2 est une variable aléatoire à densité).

b) Déterminer une densité de $-Y$ (on ne demande pas de vérifier que $-Y$ est une variable aléatoire à densité)..

c) En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d) Déterminer enfin la probabilité que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 2

On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin n}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

1) On désigne par f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$ et par λ un réel strictement positif. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt = 0$.

2) a) On rappelle que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Exprimer, pour tout réel t, $\cos\dfrac{t}{2}\cos(kt)$ en fonction de $\cos(\dfrac{2k+1}{2}t)$ et $\cos(\dfrac{2k-1}{2}t)$.

b) En déduire que :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos(\frac{2n+1}{2}t) - \cos\frac{t}{2}\right).$$

c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2\cos\frac{t}{2}}dt - \frac{1}{2}$.

3) Utiliser la première question pour conclure que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 3

Dans cet exercice, f désigne un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On se propose d'étudier quelques situations dans lesquelles on peut établir que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

1) a) Montrer que si f est un automorphisme de E, alors on a bien $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

b) Étude d'un exemple : on considère deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, F et G, de E. Tout élément x de E s'écrit donc de manière unique $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.
On appelle alors symétrie par rapport à F parallèlement à G l'endomorphisme s de E défini par :

$$s(x) = x_F - x_G.$$

Déterminer s^2 et en déduire que $E = \operatorname{Ker} s \oplus \operatorname{Im} s$.

2) Dans cette question, on suppose f diagonalisable et f non bijectif (le cas où f est bijectif ayant été traité dans la première question).

a) Traiter le cas où f est l'endomorphisme nul.

b) Dans cette question, on suppose que f n'est pas l'endomorphisme nul.

(i) Montrer que f a d'autres valeurs propres que la valeur propre 0.

(ii) Montrer que tout sous-espace propre de f associé à une valeur propre non nulle est inclus dans $\operatorname{Im} f$.

(iii) En déduire que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

c) Retrouver le résultat de la question 2b) en considérant la matrice de f dans une base bien choisie.

3) Dans cette question, on considère un endomorphisme f de E dont un polynôme annulateur est de la forme $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k X^k$ ou encore $P = a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_pX^p$, avec $a_1 \neq 0$ et $p \geq 1$.

a) Soit y un élément de $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$.

   (i) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $y = f(x)$ et $f^2(x) = 0$.

   (ii) En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a $f^k(x) = 0$ puis déterminer y.

b) Établir que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.

Problème

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 et p est un entier naturel.

Un jeu oppose n joueurs $J_1, J_2, \ldots, J_n$.

Le jeu se déroule de la façon suivante : une pièce équilibrée est lancée $(2p+1)$ fois. Avant les lancers, chaque joueur écrit une liste de prévisions pour ces lancers. Cette liste contient donc une suite de $(2p+1)$ caractères P (pour "pile") ou F (pour "face"). Les gagnants sont les joueurs ayant le plus grand nombre de prévisions correctes et ils se partagent équitablement la somme de $n!$ euros.

Par exemple, pour $p = 1$, si les lancers donnent trois fois "pile", le joueur ayant noté (P, F, P) a 2 prévisions correctes, et si les lancers donnent dans cet ordre P, F, P, le joueur ayant noté (F, P, F) n'a aucune prévision correcte.

Pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du joueur J_i, on note G_i la variable aléatoire égale au gain du joueur J_i et $E(G_i)$ l'espérance de G_i.

L'objectif du problème est de déterminer l'espérance de gain du joueur J_1 selon deux stratégies présentées dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : quelques résultats utiles pour les parties suivantes.

1) Montrer que les variables X_i suivent toutes la même loi binomiale dont on donnera les paramètres.

On pose alors, pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et pour tout k de $X_i(\Omega)$, $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leq k)$.

2) On pose $S_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k}$ et $T_p = \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}$.

   a) Calculer $S_p + T_p$.

   b) Montrer que $S_p = T_p$.

   c) Déduire des deux résultats précédents la valeur de S_p, puis montrer que $r_p = \dfrac{1}{2}$.

Partie 2 : les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres.

Dans cette partie, les variables X_i sont donc mutuellement indépendantes.

1) Montrer que $G_1(\Omega) = \left\{ \dfrac{n!}{j+1}, j \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

2) a) Montrer que $P_{(X_1=0)}\left(G_1 = \dfrac{n!}{n}\right) = (q_0)^{n-1}$.

   b) Montrer que, pour tout j élément de $[\![0, n-2]\!]$, $P_{(X_1=0)}\left(G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right) = 0$.

   c) En déduire que l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $(X_1 = 0)$ est :

$$E(G_1 / X_1 = 0) = (n-1)!\,(q_0)^{n-1}.$$

3) a) Établir que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$ et pour tout j élément de $[\![0, n-1]\!]$, on a :

$$P_{(X_1=k)}(G_1 = \frac{n!}{j+1}) = \binom{n-1}{j}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-1-j}.$$

b) Établir que $\frac{1}{j+1}\binom{n-1}{j} = \frac{1}{n}\binom{n}{j+1}$ puis en déduire que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$, l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $(X_1 = k)$ est :

$$E(G_1 / X_1 = k) = (n-1)!\,\frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k}.$$

c) Vérifier que cette expression reste valable pour $k = 0$ en posant $r_{-1} = 0$.

4) Utiliser les questions 3b) et 3c) pour établir que $E(G_1) = (n-1)!$.

Partie 3 : J_1 et J_2 forment un groupe et les autres joueurs jouent comme dans la partie 2.

Dans cette partie J_1 et J_2 adoptent la stratégie suivante : J_1 joue au hasard mais J_2 joue, pour chaque lancer, les prévisions contraires de celles de J_1. Par exemple, pour $p = 1$, si J_1 a choisi (F, P, P) alors J_2 choisit (P, F, F).

On note G' le gain du groupe formé par ces deux joueurs, J_1 et J_2 décidant de partager équitablement ce gain. On a donc, en désignant par G'_1 et G'_2 les gains respectifs de J_1 et J_2 :
$G' = G'_1 + G'_2$ et $G'_1 = G'_2$.

On pose, pour tout i de $\{1, 3, \ldots, n\}$ et pour tout k de $X_i(\Omega)$, $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leq k)$.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du meilleur de J_1 et J_2.

1) a) Montrer que un et un seul des joueurs J_1 et J_2 a au moins $(p+1)$ prévisions correctes.

b) En déduire que $Y(\Omega) = [\![p+1, 2p+1]\!]$.

2) Vérifier que, dans l'exemple donné au début de cette partie, Y prend la valeur 3 si les lancers donnent dans cet ordre F, P, P ou P, F, F et Y prend la valeur 2 sinon.

3) Pour tout k de $[\![p+1, 2p+1]\!]$, montrer que $P(Y = k) = 2\,q_k$.

4) Montrer que $G'(\Omega) = \{\frac{n!}{j+1}, j \in [\![0, n-2]\!]\}$.

5) a) Établir que, pour tout k de $[\![p+1, 2p+1]\!]$ et pour tout j élément de $[\![0, n-1]\!]$, on a :

$$P_{(Y=k)}(G' = \frac{n!}{j+1}) = \binom{n-2}{j}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-2-j}.$$

b) En déduire que, pour tout k de $[\![p+1, 2p+1]\!]$, l'espérance de G conditionnellement à l'événement $(Y = k)$ est :

$$E(G' / Y = k) = n(n-2)!\,\frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}.$$

6) a) En déduire, en utilisant le résultat de la deuxième question de la partie 1, que :

$$E(G') = 2\,n(n-2)!\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, 2^{n-1} > n$.

c) Déterminer $E(G'_1)$ et vérifier que la stratégie adoptée par les joueurs J_1 et J_2 est avantageuse pour J_1 (et donc pour J_2) du point de vue de l'espérance de leur gain.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2008

EDHEC VOIE 2008 VOIE S

CORRIGE

EXERCICE NUMERO I

1)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ y & 2x-\lambda \end{pmatrix} \qquad L_2 \longleftarrow L_2 + (2x-\lambda)L_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ P(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{où } P(\lambda) = y - \lambda(2x-\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda x + y$$

Donc $A - \lambda I$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda^2 - 2\lambda x + y = 0$.

$\Delta = 4x^2 - 4y = 4(x^2 - y)$

- Si $\Delta = 0$, $P(\lambda)$ admet une unique racine réelle $\lambda = x$, donc A admet une seule valeur propre x. La matrice A est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = xI$. Cela veut dire qu'il existe une matrice inversible $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P(xI)P^{-1} = xI$ (c'est un calcul classique). En résumé, A est diagonalisable si et seulement si elle vaut $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$. On se rend compte que cela est impossible.
- Si $\Delta > 0$, alors A admet deux racines réelles distinctes, donc elle sera diagonalisable (condition suffisante).

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } x^2 - y > 0}$$

2–a)

Soit $t \in \mathbb{R}$.

Si $t < 0$, alors l'événement $(X^2 \leq t)$ est impossible, donc $P(X^2 \leq t) = 0$

Si $t \geq 0$, alors $(X^2 \leq t) = (-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t})$.

$$\begin{aligned} P(X^2 \leq t) &= P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) \\ &= F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) \\ &= F_X(\sqrt{t}) \quad \text{car } X(\Omega_) \subset \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

∗ Si $t > 1$, $\sqrt{t} > 1$, donc $F_X(\sqrt{t}) = 1$

∗ Si $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq \sqrt{t} \leq 1$, donc $F_X(\sqrt{t}) = \sqrt{t}$

$$\text{En résumé : } F_{X^2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \sqrt{t} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{On prendra pour densité de } X^2,\ f_{X^2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]0;1[\\ \dfrac{1}{2\sqrt{t}} & \text{si } t \in]0;1[\end{cases}}$$

2–b)

$-Y(\Omega) = [-1;0]$;

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ F_{-Y}(t) &= P(-Y \le t) = P(Y \ge -t)\\ &= 1 - P(Y < -t) = 1 - P(Y \le -t) \quad \text{car } Y \text{ est une variable à densité}\end{aligned}$$

- $t < -1 \iff -t > 1$, donc $P(Y \le -t) = 1$: $F_{-Y}(t) = 0$
- $-1 \le t \le 0 \iff 0 \le -t \le 1$, donc $P(Y \le -t) = -t$ et $F_{-Y}(t) = 1 + t$
- $t > 0 \iff -t < 0$, donc $P(Y \le -t) = 0$ et $F_{-Y}(-t) = 1$

$$\boxed{F_{-Y}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ 1+t & \text{si } -1 \le t \le 0 \\ 1 & \text{si } t > -1 \end{cases} \quad : -Y \text{ suit la loi uniforme sur } [-1;0]}$$

2–c)

Les variables X et Y sont indépendantes, donc X^2 et $-Y$ le sont aussi. De plus leurs densités sont bornées (il en suffit d'une), donc on peut appliquer le produit de convolution à $X^2 + (-Y)$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f_Z(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(t) f_{-Y}(x-t)dt\\ &= \int_0^1 f_{X^2}(t) f_{-Y}(x-t)dt \ \left(\text{car } {}^2(\Omega) = [0;1]\right)\\ &= \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} f_{-Y}(x-t)dt\end{aligned}$$

On peut remarquer que cette intégrale converge puisque $\left|\frac{1}{2\sqrt{t}} f_{-Y}(x-t)\right| \le \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$$\begin{aligned}f_{-Y}(x-t) \ne 0 &\iff \begin{cases} -1 & \le x - t \le 0 \\ 0 & \le t \le 1 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x & \le t \le x+1 \\ 0 & \le t \le 1 \end{cases}\\ &\iff \max(0,x) \le t \le \min(1, x+1)\end{aligned}$$

- $x \ge 0 \Longrightarrow x \le t \le 1 \Longrightarrow x \le 1$; on a donc : $0 \le x \le 1$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} f_{-Y}(x-t)dt &= \int_x^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}}\\ &= \left[\sqrt{t}\right]_x^1\\ &= 1 - \sqrt{x}\end{aligned}$$

- $x \le 0 \Longrightarrow 0 \le t \le x+1 \Longrightarrow x+1 \ge 0$; on a donc : $-1 \le x \le 0$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} f_{-Y}(x-t)dt &= \int_0^{x+1} \frac{dt}{2\sqrt{t}}\\ &= \left[\sqrt{t}\right]_0^{x+1}\\ &= \sqrt{x+1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En résumé, } f_Z(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [-1;0] \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}}$$

2–d)

La matrice M sera diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $Z > 0$

$$P(Z > 0) = \int_0^1 f_Z(t)dt = \int_0^1 (1 - \sqrt{t})dt = 1 - \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$