



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

**MATHÉMATIQUES**

Option scientifique

Mardi 6 mai 2008 de 8h à 12h

**Code sujet**

**297**

**EDHECMATS**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***

## Exercice 1

1) On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$ , élément de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels  $x$  et  $y$  pour que la matrice  $A$  soit diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

2) Dans la suite,  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires réelles, définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes et qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . On note  $F_X$  (respectivement  $F_Y$ ) la fonction de répartition de  $X$  (respectivement  $Y$ ).

a) Déterminer une densité de  $X^2$  (on ne demande pas de vérifier que  $X^2$  est une variable aléatoire à densité).

b) Déterminer une densité de  $-Y$  (on ne demande pas de vérifier que  $-Y$  est une variable aléatoire à densité)..

c) En déduire que la variable aléatoire  $X^2 - Y$  admet pour densité la fonction  $h$  définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d) Déterminer enfin la probabilité que la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$  soit diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

## Exercice 2

On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général  $u_n = (-1)^n \frac{\sin n}{n}$  est convergente et de calculer sa somme.

1) On désigne par  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $[a, b]$  et par  $\lambda$  un réel strictement positif. Montrer, grâce à une intégration par parties, que :  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0$ .

2) a) On rappelle que :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ .

Exprimer, pour tout réel  $t$ ,  $\cos \frac{t}{2} \cos(kt)$  en fonction de  $\cos(\frac{2k+1}{2}t)$  et  $\cos(\frac{2k-1}{2}t)$ .

b) En déduire que :

$$\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \cos \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = \frac{1}{2} \left( (-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos \frac{t}{2} \right).$$

c) Montrer alors que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2 \cos \frac{t}{2}} dt - \frac{1}{2}$ .

3) Utiliser la première question pour conclure que la série de terme général  $u_n$  converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

## Exercice 3

Dans cet exercice,  $f$  désigne un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. On se propose d'étudier quelques situations dans lesquelles on peut établir que  $E = \text{Ker}f \oplus \text{Im}f$ .

1) a) Montrer que si  $f$  est un automorphisme de  $E$ , alors on a bien  $E = \text{Ker}f \oplus \text{Im}f$ .

b) Étude d'un exemple : on considère deux sous-espaces vectoriels supplémentaires,  $F$  et  $G$ , de  $E$ . Tout élément  $x$  de  $E$  s'écrit donc de manière unique  $x = x_F + x_G$ , avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ .

On appelle alors symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  l'endomorphisme  $s$  de  $E$  défini par :

$$s(x) = x_F - x_G.$$

Déterminer  $s^2$  et en déduire que  $E = \text{Ker}s \oplus \text{Im}s$ .

2) Dans cette question, on suppose  $f$  diagonalisable et  $f$  non bijectif (le cas où  $f$  est bijectif ayant été traité dans la première question).

a) Traiter le cas où  $f$  est l'endomorphisme nul.

b) Dans cette question, on suppose que  $f$  n'est pas l'endomorphisme nul.

(i) Montrer que  $f$  a d'autres valeurs propres que la valeur propre 0.

(ii) Montrer que tout sous-espace propre de  $f$  associé à une valeur propre non nulle est inclus dans  $\text{Im}f$ .

(iii) En déduire que  $E = \text{Ker}f \oplus \text{Im}f$ .

c) Retrouver le résultat de la question 2b) en considérant la matrice de  $f$  dans une base bien choisie.

3) Dans cette question, on considère un endomorphisme  $f$  de  $E$  dont un polynôme annulateur est de

la forme  $P = \sum_{k=1}^p a_k X^k$  ou encore  $P = a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_p X^p$ , avec  $a_1 \neq 0$  et  $p \geq 1$ .

- a) Soit  $y$  un élément de  $\text{Im}f \cap \text{Ker}f$ .
- (i) Montrer qu'il existe un vecteur  $x$  de  $E$  tel que  $y = f(x)$  et  $f^2(x) = 0$ .
- (ii) En déduire que, pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 2, on a  $f^k(x) = 0$  puis déterminer  $y$ .
- b) Établir que  $E = \text{Ker}f \oplus \text{Im}f$ .

## Problème

Dans ce problème,  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 3 et  $p$  est un entier naturel.

Un jeu oppose  $n$  joueurs  $J_1, J_2, \dots, J_n$ .

Le jeu se déroule de la façon suivante : une pièce équilibrée est lancée  $(2p + 1)$  fois. Avant les lancers, chaque joueur écrit une liste de prévisions pour ces lancers. Cette liste contient donc une suite de  $(2p + 1)$  caractères  $P$  (pour "pile") ou  $F$  (pour "face"). Les gagnants sont les joueurs ayant le plus grand nombre de prévisions correctes et ils se partagent équitablement la somme de  $n!$  euros.

Par exemple, pour  $p = 1$ , si les lancers donnent trois fois "pile", le joueur ayant noté  $(P, F, P)$  a 2 prévisions correctes, et si les lancers donnent dans cet ordre  $P, F, P$ , le joueur ayant noté  $(F, P, F)$  n'a aucune prévision correcte.

Pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du joueur  $J_i$ , on note  $G_i$  la variable aléatoire égale au gain du joueur  $J_i$  et  $E(G_i)$  l'espérance de  $G_i$ .

L'objectif du problème est de déterminer l'espérance de gain du joueur  $J_1$  selon deux stratégies présentées dans les parties 2 et 3.

### Partie 1 : quelques résultats utiles pour les parties suivantes.

1) Montrer que les variables  $X_i$  suivent toutes la même loi binomiale dont on donnera les paramètres.

On pose alors, pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  et pour tout  $k$  de  $X_i(\Omega)$ ,  $q_k = P(X_i = k)$  et  $r_k = P(X_i \leq k)$ .

2) On pose  $S_p = \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k}$  et  $T_p = \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}$ .

a) Calculer  $S_p + T_p$ .

b) Montrer que  $S_p = T_p$ .

c) Déduire des deux résultats précédents la valeur de  $S_p$ , puis montrer que  $r_p = \frac{1}{2}$ .

### Partie 2 : les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres.

Dans cette partie, les variables  $X_i$  sont donc mutuellement indépendantes.

1) Montrer que  $G_1(\Omega) = \left\{ \frac{n!}{j+1}, j \in [0, n-1] \right\}$ .

2) a) Montrer que  $P_{(X_1=0)}(G_1 = \frac{n!}{n}) = (q_0)^{n-1}$ .

b) Montrer que, pour tout  $j$  élément de  $[0, n-2]$ ,  $P_{(X_1=0)}(G_1 = \frac{n!}{j+1}) = 0$ .

c) En déduire que l'espérance de  $G_1$  conditionnellement à l'événement  $(X_1 = 0)$  est :

$$E(G_1 / X_1 = 0) = (n-1)! (q_0)^{n-1}.$$

3) a) Établir que, pour tout  $k$  non nul de  $X_1(\Omega)$  et pour tout  $j$  élément de  $[[0, n-1]]$ , on a :

$$P_{(X_1=k)}(G_1 = \frac{n!}{j+1}) = \binom{n-1}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-1-j}.$$

b) Établir que  $\frac{1}{j+1} \binom{n-1}{j} = \frac{1}{n} \binom{n}{j+1}$  puis en déduire que, pour tout  $k$  non nul de  $X_1(\Omega)$ , l'espérance de  $G_1$  conditionnellement à l'événement  $(X_1 = k)$  est :

$$E(G_1 / X_1 = k) = (n-1)! \frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k}.$$

c) Vérifier que cette expression reste valable pour  $k = 0$  en posant  $r_{-1} = 0$ .

4) Utiliser les questions 3b) et 3c) pour établir que  $E(G_1) = (n-1)!$ .

### **Partie 3 : $J_1$ et $J_2$ forment un groupe et les autres joueurs jouent comme dans la partie 2.**

Dans cette partie  $J_1$  et  $J_2$  adoptent la stratégie suivante :  $J_1$  joue au hasard mais  $J_2$  joue, pour chaque lancer, les prévisions contraires de celles de  $J_1$ . Par exemple, pour  $p = 1$ , si  $J_1$  a choisi  $(F, P, P)$  alors  $J_2$  choisit  $(P, F, F)$ .

On note  $G'$  le gain du groupe formé par ces deux joueurs,  $J_1$  et  $J_2$  décidant de partager équitablement ce gain. On a donc, en désignant par  $G'_1$  et  $G'_2$  les gains respectifs de  $J_1$  et  $J_2$  :  $G' = G'_1 + G'_2$  et  $G'_1 = G'_2$ .

On pose, pour tout  $i$  de  $\{1, 3, \dots, n\}$  et pour tout  $k$  de  $X_i(\Omega)$ ,  $q_k = P(X_i = k)$  et  $r_k = P(X_i \leq k)$ .

On note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du meilleur de  $J_1$  et  $J_2$ .

1) a) Montrer que un et un seul des joueurs  $J_1$  et  $J_2$  a au moins  $(p+1)$  prévisions correctes.

b) En déduire que  $Y(\Omega) = [[p+1, 2p+1]]$ .

2) Vérifier que, dans l'exemple donné au début de cette partie,  $Y$  prend la valeur 3 si les lancers donnent dans cet ordre  $F, P, P$  ou  $P, F, F$  et  $Y$  prend la valeur 2 sinon.

3) Pour tout  $k$  de  $[[p+1, 2p+1]]$ , montrer que  $P(Y = k) = 2q_k$ .

4) Montrer que  $G'(\Omega) = \{ \frac{n!}{j+1}, j \in [[0, n-2]] \}$ .

5) a) Établir que, pour tout  $k$  de  $[[p+1, 2p+1]]$  et pour tout  $j$  élément de  $[[0, n-1]]$ , on a :

$$P_{(Y=k)}(G' = \frac{n!}{j+1}) = \binom{n-2}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-2-j}.$$

b) En déduire que, pour tout  $k$  de  $[[p+1, 2p+1]]$ , l'espérance de  $G$  conditionnellement à l'événement  $(Y = k)$  est :

$$E(G' / Y = k) = n(n-2)! \frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}.$$

6) a) En déduire, en utilisant le résultat de la deuxième question de la partie 1, que :

$$E(G') = 2 n(n-2)! \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

b) Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, 2^{n-1} > n$ .

c) Déterminer  $E(G'_1)$  et vérifier que la stratégie adoptée par les joueurs  $J_1$  et  $J_2$  est avantageuse pour  $J_1$  (et donc pour  $J_2$ ) du point de vue de l'espérance de leur gain.



## ANNALES DE MATHÉMATIQUES 2008

## EDHEC VOIE 2008 VOIE S

## CORRIGE

## EXERCICE NUMERO I

1)

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  ;  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si la matrice  $A - \lambda I$  n'est pas inversible.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ y & 2x - \lambda \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + (2x - \lambda)L_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ P(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } P(\lambda) = y - \lambda(2x - \lambda) = \lambda^2 - 2\lambda x + y$$

Donc  $A - \lambda I$  n'est pas inversible si et seulement si  $\lambda^2 - 2\lambda x + y = 0$ .

$$\Delta = 4x^2 - 4y = 4(x^2 - y)$$

- Si  $\Delta = 0$ ,  $P(\lambda)$  admet une unique racine réelle  $\lambda = x$ , donc  $A$  admet une seule valeur propre  $x$ . La matrice  $A$  est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = xI$ . Cela veut dire qu'il existe une matrice inversible  $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $A = P(xI)P^{-1} = xI$  (c'est un calcul classique). En résumé,  $A$  est diagonalisable si et seulement si elle vaut  $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ . On se rend compte que cela est impossible.

- Si  $\Delta > 0$ , alors  $A$  admet deux racines réelles distinctes, donc elle sera diagonalisable (condition suffisante).

$A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  si et seulement si  $x^2 - y > 0$

2-a)

Soit  $t \in \mathbb{R}$ .

Si  $t < 0$ , alors l'événement  $(X^2 \leq t)$  est impossible, donc  $P(X^2 \leq t) = 0$

Si  $t \geq 0$ , alors  $(X^2 \leq t) = (-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t})$ .

$$\begin{aligned} P(X^2 \leq t) &= P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) \\ &= F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) \\ &= F_X(\sqrt{t}) \quad \text{car } X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

\* Si  $t > 1$ ,  $\sqrt{t} > 1$ , donc  $F_X(\sqrt{t}) = 1$

\* Si  $0 \leq t \leq 1$ ,  $0 \leq \sqrt{t} \leq 1$ , donc  $F_X(\sqrt{t}) = \sqrt{t}$

$$\text{En résumé : } F_{X^2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \sqrt{t} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

$$\text{On prendra pour densité de } X^2, f_{X^2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin ]0; 1[ \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} & \text{si } t \in ]0; 1[ \end{cases}$$

2-b)

$$-Y(\Omega) = [-1; 0];$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{-Y}(t) = P(-Y \leq t) = P(Y \geq -t) \\ = 1 - P(Y < -t) = 1 - P(Y \leq -t) \quad \text{car } Y \text{ est une variable à densité}$$

- $t < -1 \iff -t > 1$ , donc  $P(Y \leq -t) = 1 : F_{-Y}(t) = 0$
- $-1 \leq t \leq 0 \iff 0 \leq -t \leq 1$ , donc  $P(Y \leq -t) = -t$  et  $F_{-Y}(t) = 1 + t$
- $t > 0 \iff -t < 0$ , donc  $P(Y \leq -t) = 0$  et  $F_{-Y}(-t) = 1$

$$F_{-Y}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ 1 + t & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t > -1 \end{cases} \quad : -Y \text{ suit la loi uniforme sur } [-1; 0]$$

2-c)

Les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, donc  $X^2$  et  $-Y$  le sont aussi. De plus leurs densités sont bornées (il en suffit d'une), donc on peut appliquer le produit de convolution à  $X^2 + (-Y)$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(t) f_{-Y}(x-t) dt \\ = \int_0^1 f_{X^2}(t) f_{-Y}(x-t) dt \quad (\text{car } {}^2(\Omega) = [0; 1]) \\ = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} f_{-Y}(x-t) dt$$

On peut remarquer que cette intégrale converge puisque  $\left| \frac{1}{2\sqrt{t}} f_{-Y}(x-t) \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$$f_{-Y}(x-t) \neq 0 \iff \begin{cases} -1 \leq x-t \leq 0 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \leq t \leq x+1 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\iff \max(0, x) \leq t \leq \min(1, x+1)$$

- $x \geq 0 \implies x \leq t \leq 1 \implies x \leq 1$ ; on a donc :  $0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} f_{-Y}(x-t) dt = \int_x^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ = \left[ \sqrt{t} \right]_x^1 \\ = 1 - \sqrt{x}$$

- $x \leq 0 \implies 0 \leq t \leq x+1 \implies x+1 \geq 0$ ; on a donc :  $-1 \leq x \leq 0$

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} f_{-Y}(x-t) dt = \int_0^{x+1} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ = \left[ \sqrt{t} \right]_0^{x+1} \\ = \sqrt{x+1}$$

$$\text{En résumé, } f_Z(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [-1; 0] \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2-d)

La matrice  $M$  sera diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  si et seulement si  $Z > 0$

$$P(Z > 0) = \int_0^1 f_Z(t) dt = \int_0^1 (1 - \sqrt{t}) dt = 1 - \left[ \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$