ESCP-EAP

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES III

Jeudi 15 mai 2003, de 8h à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

Soit a, b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.
Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.
On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :
- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne ;
- si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.
On désigne par $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :
- B_n l'événement « la n-ième boule tirée est blanche » ;
- X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages ;
- u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n, c'est-à-dire $u_n = \mathbf{E}(X_n)$.

1. Étude d'un ensemble de suites

Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n \geqslant 1}$ de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s\, x_{n+1} = (s-1)\, x_n + b + n$$

a) Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \alpha\, n + \beta$.
Déterminer en fonction de b et de s les valeurs de α et β pour que la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ appartienne à A.

b) Soit $(x_n)_{n \geqslant 1}$ une suite appartenant à A, $(v_n)_{n \geqslant 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n = x_n - v_n$.
Montrer que la suite $(y_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n puis x_n en fonction de x_1, b, s et n.

2. Expression de la probabilité $\mathbf{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n

a) Donner, en fonction de b et de s, les valeurs respectives de la probabilité $\mathbf{P}(B_1)$ et du nombre u_1.

b) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(B_2)$ et vérifier l'égalité : $\mathbf{P}(B_2) = \dfrac{b+1-u_1}{s}$.

c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leqslant n \leqslant a$. Montrer que, pour tout entier k de l'intervalle $[\![0, n]\!]$, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(B_{n+1}/[X_n = k])$ est égale à $\dfrac{b+n-k}{s}$.

En déduire l'égalité : $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$.

d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.
Si k est un entier de l'intervalle $[\![0, n-a-1]\!]$, quel est l'événement $[X_n = k]$?
Si k est un entier de l'intervalle $[\![n-a, n]\!]$, justifier l'égalité : $\mathbf{P}(B_{n+1}/[X_n = k]) = \dfrac{b+n-k}{s}$.
Montrer enfin que l'égalité $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$ est encore vérifiée.

3. Calcul des nombres u_n et $\mathbf{P}(B_n)$

a) Soit n un entier naturel non nul. Établir, pour tout entier k de l'intervalle $[\![n+1-a, n]\!]$, l'égalité :

$$\mathbf{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{a-n+k}{s}\mathbf{P}([X_n = k]) + \frac{b+n-k+1}{s}\mathbf{P}([X_n = k-1])$$

Vérifier cette égalité pour $k = n+1$, $k = n-a$ et pour tout entier k de l'intervalle $[\![1, n-a-1]\!]$.

b) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ appartient à l'ensemble A étudié dans la question **1.**

c) Donner, pour tout entier naturel n non nul, les valeurs de u_n et de $\mathbf{P}(B_{n+1})$ en fonction de b, s et n.

d) Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathbf{P}(B_n))_{n\geqslant 1}$?

PROBLÈME

Dans tout le problème, on désigne par $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
À toute application f de $\mathcal{C}$, on associe l'application $D(f)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

*Les parties **A**, **B** et **C** sont indépendantes.*

Question préliminaire : D est-il un endomorphisme de $\mathcal{C}$?

Partie A : Image par D d'une fonction de répartition

1. Soit F une application de $\mathcal{C}$. Rappeler les propriétés que doit posséder F pour être considérée comme une fonction de répartition.

2. Soit F une application de $\mathcal{C}$ qui est une fonction de répartition et g l'application $D(F)$.

a) Montrer que g est positive.

b) Prouver, pour tout réel x, la double inégalité : $F(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{x+1} F(t)\,\mathrm{d}t \leqslant F(x+1)$.

En déduire que les limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^{x+1} F(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} F(t)\,\mathrm{d}t$ existent et préciser leurs valeurs.

c) Soit A et B deux réels vérifiant $A < 0 < B$ et $I(A,B)$ l'intégrale : $I(A,B) = \displaystyle\int_A^B g(t)\,\mathrm{d}t$.

Justifier l'égalité : $I(A,B) = \displaystyle\int_B^{B+1} F(t)\,\mathrm{d}t - \int_A^{A+1} F(t)\,\mathrm{d}t$.

d) Prouver alors soigneusement que g est une densité de probabilité.

3. Un exemple

On suppose, dans cette question, que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et on pose : $g = D(F)$.

Déterminer $g(x)$ pour tout réel x, en distinguant les cas $x < -1$, $-1 \leqslant x < 0$, $0 \leqslant x < 1$ et $1 \leqslant x$.

Représenter graphiquement l'application g.

Partie B : Recherche des valeurs propres de D

Si λ est un réel, on dit que λ est une *valeur propre* de D s'il existe une application f de $\mathcal{C}$, distincte de l'application nulle, vérifiant : $D(f) = \lambda\, f$.

1. Soit a un réel. On note g_a l'application de $\mathcal{C}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = e^{ax}$.
Déterminer l'application $D(g_a)$.

2. En déduire que tout réel λ strictement supérieur à -1 est une valeur propre de D.

3. Soit a un réel. On note h_a l'application de $\mathcal{C}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, h_a(x) = \sin(\pi x)\, e^{ax}$.
Déterminer l'application $D(h_a)$.

4. En déduire que tout réel λ strictement inférieur à -1 est une valeur propre de D.

5. Le réel -1 est-il une valeur propre de D ?

Partie C : Image par D d'une application polynomiale

Pour tout entier naturel p, on désigne par E_p le sous-espace de $\mathcal{C}$ dont les éléments sont les applications polynomiales de degré au plus p.

On note X l'application $x \mapsto x$ et, pour tout entier naturel non nul k, on note X^k l'application $x \mapsto x^k$.

Soit $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite d'applications polynomiales définie par :

$$H_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad H_i = \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X - k)$$

1. Préciser $H_1,\ H_2,\ H_3$ et montrer que $\mathcal{U}_3 = (H_0,\ H_1,\ H_2,\ H_3)$ est une base de E_3.

2. Soit $\mathcal{B}_3 = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E_3.

a) Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_3$ à la base $\mathcal{U}_3$ et calculer la matrice P^{-1}.

b) Soit $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ des réels et Q l'application polynomiale $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$.
Quelles sont les coordonnées de Q dans la base $\mathcal{U}_3$?
En particulier, vérifier l'égalité : $X^3 = H_1 + 6\, H_2 + 6\, H_3$.

3. Application : moment d'ordre 3 d'une variable aléatoire de Poisson

Soit a un réel strictement positif et Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^3\, a^k}{k!}$.
Transformer S_n à l'aide de la relation : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = H_1(k) + 6\, H_2(k) + 6\, H_3(k)$.
En déduire que la série de terme général $\dfrac{n^3\, a^n}{n!}$ est convergente et préciser $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3\, a^n}{n!}$.

b) En déduire que la variable aléatoire Z admet un moment d'ordre 3 donné par :

$$\mathbf{E}(Z^3) = a + 3a^2 + a^3$$

4. Dans cette question, p est un entier naturel non nul fixé.

a) Montrer que, si Q appartient à E_p, $D(Q)$ appartient aussi à E_p.
On note alors D_p l'endomorphisme de E_p qui, à tout Q de E_p, associe $D(Q)$.

b) Montrer que la famille $\mathcal{U}_p = (H_0, H_1, \ldots, H_p)$ est une base de E_p.

c) Déterminer $D_p(H_0)$, $D_p(H_1)$ et prouver, pour tout entier i vérifiant $0 < i \leqslant p$, l'égalité :
$D_p(H_i) = H_{i-1}$.

d) Écrire la matrice M_p représentative de D_p dans la base $\mathcal{U}_p$.

e) Préciser la ou les valeurs propres de M_p. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

5. Application : moment d'ordre p d'une variable aléatoire de Poisson

Soit p un entier naturel non nul fixé et $b_0, b_1, \ldots, b_p$ les réels vérifiant

$$X^p = b_0 H_0 + b_1 H_1 + \cdots + b_p H_p$$

Par une méthode analogue à celle de la question **3.**, montrer que la variable aléatoire Z définie dans la question **3.** admet un moment d'ordre p donné par $\mathbf{E}(Z^p) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{b_i\, a^i}{i!}$.

6. Dans cette question, p est un entier naturel non nul et, pour tout entier i vérifiant $0 \leqslant i \leqslant p$, on considère l'application φ_i de E_p dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément Q de E_p, associe le réel :

$$\varphi_i(Q) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k}\, \mathrm{C}_i^k\, Q(k)$$

où C_i^k désigne le coefficient binomial d'indices i et k.

a) Montrer que, pour tout entier i vérifiant $0 \leqslant i \leqslant p$, l'application φ_i est linéaire.

b) Soit i et j deux entiers vérifiant $0 \leqslant i \leqslant p$ et $0 \leqslant j \leqslant p$; établir les égalités :

$$\varphi_i(H_i) = 1 \qquad \text{et si} \quad j \neq i, \quad \varphi_i(H_j) = 0$$

c) En déduire, pour tout entier i vérifiant $0 \leqslant i \leqslant p$, la relation : $b_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k}\, \mathrm{C}_i^k\, k^p$.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2003

ESC-PEAP MATH III 2003 VOIE E

CORRIGE

EXERCICE

1. Etude d'un ensemble de suites

QUESTION–a)

$(x_n) \in A \iff \forall n \geq 1,$

$$\begin{aligned} s(\alpha(n+1)+\beta) &= (s-1)(\alpha n+\beta)+b+n \\ s\alpha n+s\alpha+s\beta &= n(s\alpha-\alpha+1)+\beta(s-1)+b \\ s\alpha &= n(1-\alpha)-\beta+b \\ n(1-\alpha)-\beta+b-s\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Cette égalité doit avoir lieu pour tous les entiers $n \geq 1$. Si nous considérons la fonction polynomiale $x \mapsto (1-\alpha)x-\beta+b-s\alpha$, **ce polynôme admet une infinité de racines (tous les entiers naturels non nuls), ce polynôme est donc le polynôme nul : tous ses coefficients sont nuls.** On obtient donc le système $\begin{cases} \alpha &= 1 \\ \beta &= b-s\alpha = b-s. \end{cases}$

> La suite $(v_n) = (\alpha n+\beta)$ appartient à A si et seulement si $\alpha = 1$ et $\beta = b-s$. $\quad \forall n \geq 1,\ v_n = n+b-s.$

QUESTION–b)

Pour tout entier $n \geq 1$, on a : $sx_{n+1} = (s-1)x_n+b+n$ et $sv_{n+1} = (s-1)v_n+b+n$. Soustrayons membre à membre ces deux égalités, on obtient : $s(x_{n+1}-v_{n+1}) = (s-1)(x_n-v_n)$, soit $sy_{n+1} = (s-1)y_n$.

Par hypothèse a et b sont des entiers naturels non nuls donc $s = a+b \geq 2$. L'égalité précédente équivaut à : $\forall n \geq 1,\ y_{n+1} = \dfrac{s-1}{s}y_n$.

La suite (y_n) est géométrique, de raison $\frac{s-1}{s}$ et de premier terme $y_1 = x_1-v_1 = x_1+s-b-1$.

> $\forall n \geq 1,\ y_n = \left(\dfrac{s-1}{s}\right)^{n-1}(x_1+s-b-1).$
>
> Donc $x_n = y_n+v_n = \left(\dfrac{s-1}{s}\right)^{n-1}(x_1+s-b-1)+n+b-s.$

2. Expression de la probabilité $P(B_{n+1})$ à l'aide de u_n.

QUESTION–a)

$\boxed{P(B_1) = \frac{b}{s}}$; la variable X_1 prend pour valeurs 0 et 1.

C'est une variable de Bernoulli, de paramètre $P(X_1 = 1) = P(B_1) = \frac{b}{s}$.

Donc, $\boxed{u_1 = \frac{b}{s}.}$

QUESTION–b)

Les événements B_1 et $\overline{B_1}$ forment un système complet d'événements. Appliquons la formule des probabilités totales à l'événement B_2.

$P(B_2) = P(B_1)P(B_2/_{B_1}) + P(\overline{B_1})P(B_2/_{\overline{B_1}})$.

$*$ Si l'événement B_1 est réalisé, l'urne à la même configuration à l'issue du premier tirage qu'initialement, donc $P(B_2/_{B_1}) = \frac{b}{s}$;

$*$ Si l'événement $\overline{B_1}$ est réalisé, l'urne contient $b+1$ boules blanches (on en a rajouté une) et $a-1$ boules noires (on n'a pas remis celle que l'on a tirée) ; donc $P(B_2/_{\overline{B_1}}) = \frac{b+1}{s}$.

La formule des probabilités totales donne : $\boxed{P(B_2) = \left(\frac{b}{s}\right)^2 + \frac{a}{s}\frac{b+1}{s}.}$

Vérifions l'égalité :

$P(B_2) = \frac{1}{s}\left(\frac{b(a+b)}{s} + \frac{a}{s}\right) = \frac{1}{s}\left(b + \frac{s-b}{s}\right) = \frac{1}{s}\left(b + 1 - u_1\right)$, car $a+b = s$ et $a = s-b$.

QUESTION–c)

Remarque : A l'issue d'un tirage quelconque, le nombre de boules blanches n'a pas diminué (il est resté stationnaire ou il a augmenté d'une unité), le nombre de boules noires n'a pas augmenté (il est resté stationnaire ou il a diminué d'une unité) : **on ne peut donc pas tirer plus de a boules noires.**

- $\boxed{\text{Si } 1 \leq n \leq a \text{ et } 0 \leq k \leq n}$, alors $0 \leq n-k \leq n$ et donc a fortiori $0 \leq n-k \leq a$. Or $(X_n = k)$ veut dire que l'on a tiré k boules blanches au cours des n premiers tirages, donc on en a tiré $n-k$ noires avec $0 \leq n-k \leq a$, ce qui est tout-à-fait possible.

Aucun des événements $(X_n = k)$ pour $0 \leq k$ n'est impossible.

La probabilité conditionnelle $P(B_{n+1}/_{X_n = k})$ a un sens puisque

$P(X_n = k) > 0$. Quand l'événement $(X_n = k)$ est réalisé, la composition de l'urne est la suivante : $a-(n-k)$ boules noires et $b+n-k$ boules blanches.
$\boxed{P(B_{n+1}/_{X_n = k}) = \frac{b+n-k}{s}.}$

Remarque : Puisque tous les événements $(X_n = k)$ sont possibles pour $0 \leq k \leq n$ et qu'évidemment $X_n(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$, on en conclut que $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

- **Appliquons la formule des probabilités totales à l'événement B_{n+1} pour le sytème complet d'événements $\{(X_n = k),\ (0 \leq k \leq n)\}$.**

$$\begin{aligned}P(B_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n} P(B_{n+1}/_{X_n=k})P(X_n=k)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{b+n-k}{s}P(X_n=k)\\ &= \frac{b+n}{s}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}P(X_n=k)}_{=1}-\frac{1}{s}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}kP(X_n=k)}_{=E(X_n)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Quand } 1\le n\le a,\ P(B_{n+1})=\frac{b+n-u_n}{s}.}$$

QUESTION–d)

Nous sommes dans le cas $n > a$.

- $\boxed{\text{Si } 0\le k\le n-a-1}$, alors $n-k \geq a+1 > a$. **L'événement** $(X_n = k)$ **est impossible** puisqu'il veut dire également que l'on a tiré $n-k$ boules noires, c'est à dire strictement plus que a et cela est impossible.

Donc $X_n(\Omega) \subset [\![n-a; n]\!]$

- $\boxed{\text{Si } n-a\le k\le n}$, alors $n - k \leq a$. Aucun des événements $(X_n = k)$ n'est impossible. Donc $X_n(\Omega) = [\![n - a; n]\!]$.

Le même calcul que dans le **c)** (les conditions sont identiques) donne

$$\boxed{P(B_{n+1}/_{X_n=k})=\frac{b+n-k}{s}.}$$

$$\begin{aligned}P(B_{n+1}) &= \sum_{k=n-a}^{n} P(B_{n+1}/_{X_n=k})P(X_n=k)\\ &= \sum_{k=n-a}^{n}\frac{b+n-k}{s}P(X_n=k)\\ &= \frac{b+n}{s}\underbrace{\sum_{k=n-a}^{n}P(X_n=k)}_{=1}-\frac{1}{s}\underbrace{\sum_{k=n-a}^{n}kP(X_n=k)}_{=E(X_n)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Quand } n>a\ ,\ P(B_{n+1})=\dfrac{b+n-u_n}{s}.\\ \text{Conclusion : } \forall n\ge 1,\ P(B_{n+1})=\dfrac{b+n-u_n}{s}.\end{array}}$$

3. Calcul des nombres u_n et $P(B_n)$.

Remarque : **L'énoncé ne précise pas la position de a par rapport à n.** Si $n+1-a < 0$, k peut être strictement négatif. Dans ce cas, on ne peut pas conditionner par l'événement $(X_n = k)$ dont le probabilité est nulle. Il y a donc obligation de discuter suivant a.

QUESTION–a)

- **Premier cas :** $1 \leq n \leq a$.

Dans ce cas, $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$ d'après la question **2.b)**

Or $1 \leq n \leq a \Longrightarrow 2 \leq n+1 \leq a+1 \Longrightarrow 2-a \leq n+1-a \leq 1$; donc prendre k dans $[\![n+1-a;n]\!]$ reviendra à prendre k dans $[\![0;n]\!]$ ou $[\![1;n]\!]$ (les valeurs négatives de k donnant des événements impossibles).

$*$ Pour $1 \leq k \leq n$, les événements $X_n = k-1$ et $X_n = k$ sont possibles, les probabilités conditionnelles ont un sens.

Appliquons la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $(X_n = j),\ 0 \leq j \leq n)$**.**

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=k) &= \sum_{j=0}^{n} P(X_{n+1}=k/_{X_n=j})P(X_n=j) \\ &= P(X_{n+1}=k/_{X_n=k})P(X_n=k)+ \\ &\qquad P(X_{n+1}=k/_{X_n=k-1})P(X_n=k-1) \end{aligned}$$

Les autres probabilités conditionnelles sont nulles : en effet, on peut ajouter **au mieux** une boule blanche au total des n premiers tirages lorsque l'on effectue le suivant : si $j \leq k-2$ ou si $j \geq k+1$ alors $P(X_{n+1}=k/_{X_n=j})=0$. Dans le premier cas il faudrait au $(n+1)$ ème tirage rajouter au moins deux boules blanches et dans le second, il faudrait en enlever.

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=k) &= P(X_{n+1}=k/_{X_n=k})P(X_n=k)+ \\ &\qquad P(X_{n+1}=k/_{X_n=k-1})P(X_n=k-1) \\ &= P(\overline{B_{n+1}}/_{X_n=k})P(X_n=k)+ \\ &\qquad P(B_{n+1}/_{X_n=k-1})P(X_n=k-1) \\ &= \left(1-\frac{b+n-k}{s}\right)P(X_n=k)+\frac{b+n-(k-1)}{s}P(X_n=k-1) \\ &= \frac{a-n+k}{s}P(X_n=k)+\frac{b+n-k+1}{s}P(X_n=k-1) \end{aligned}$$

Pour $k=0$.

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=0) &= P(X_n=0)P(X_{n+1}=0/_{X_n=0}) \\ &= P(\overline{B_{n+1}}/_{X_n=0})P(X_n=0) \\ &= \left(1-\frac{b+n}{s}\right)P(X_n=0)=\frac{a-n}{s}P(X_n=0) \\ &= \frac{a-n+0}{s}P(X_n=0)+\frac{b+n-0+1}{s}\underbrace{P(X_n=0-1)}_{=0} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Si } 1 \leq n \leq a,\ \forall k \in [\![n+1-a;n]\!], \\ &P(X_{n+1}=k)=\frac{a-n+k}{s}P(X_n=k)+\frac{b+n-k+1}{s}P(X_n=k-1) \end{aligned}}$$

$*$ Si $k=n+1$,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=n+1) &= P(X_n=n)P(X_{n+1}=n+1/_{X_n=n}) \\ &= P(B_{n+1}/_{X_n=n})P(X_n=n)=\frac{b+n-n}{s}P(X_n=n) \\ &= \frac{b+n-n-1+1}{s}P(X_n=n) \\ &\qquad +\frac{a-n+n+1}{s}\underbrace{P(X_n=n+1)}_{=0} \end{aligned}$$

La formule est valable pour $k=n+1$.

$*$ Pour $k=n-a$.

$(X_{n+1}=n-a)$ est impossible car alors $n+1-(n-a)=a+1>a$: il aurait fallu tirer $a+1$ boules noires.

Dans la formule, la fraction $\dfrac{a-n+k}{s}$ vaut 0, et l'événement $(X_n=k-1)=(X_n=n-a-1)$ est impossible car $n-(n-a-1)=a+1>a$.

La formule est valable pour $k=n-a$**, tous les termes y sont nuls.**