



ESCP-EAP

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES III

Jeudi 15 mai 2003, de 8h à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

Soit a, b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.

Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.

On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne ;
- si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.

On désigne par $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :

- B_n l'événement « la n -ième boule tirée est blanche » ;
- X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages ;
- u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n , c'est-à-dire $u_n = \mathbf{E}(X_n)$.

1. Étude d'un ensemble de suites

Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n \geq 1}$ de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s x_{n+1} = (s-1)x_n + b + n$$

- Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \alpha n + \beta$.
Déterminer en fonction de b et de s les valeurs de α et β pour que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ appartienne à A .
- Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite appartenant à A , $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n = x_n - v_n$.
Montrer que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n puis x_n en fonction de x_1, b, s et n .

2. Expression de la probabilité $\mathbf{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n

- a) Donner, en fonction de b et de s , les valeurs respectives de la probabilité $\mathbf{P}(B_1)$ et du nombre u_1 .
- b) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(B_2)$ et vérifier l'égalité : $\mathbf{P}(B_2) = \frac{b+1-u_1}{s}$.
- c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leq n \leq a$. Montrer que, pour tout entier k de l'intervalle $\llbracket 0, n \rrbracket$, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(B_{n+1}/[X_n = k])$ est égale à $\frac{b+n-k}{s}$.

En déduire l'égalité : $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$.

- d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.

Si k est un entier de l'intervalle $\llbracket 0, n-a-1 \rrbracket$, quel est l'événement $[X_n = k]$?

Si k est un entier de l'intervalle $\llbracket n-a, n \rrbracket$, justifier l'égalité : $\mathbf{P}(B_{n+1}/[X_n = k]) = \frac{b+n-k}{s}$.

Montrer enfin que l'égalité $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$ est encore vérifiée.

3. Calcul des nombres u_n et $\mathbf{P}(B_n)$

- a) Soit n un entier naturel non nul. Établir, pour tout entier k de l'intervalle $\llbracket n+1-a, n \rrbracket$, l'égalité :

$$\mathbf{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{a-n+k}{s} \mathbf{P}([X_n = k]) + \frac{b+n-k+1}{s} \mathbf{P}([X_n = k-1])$$

Vérifier cette égalité pour $k = n+1$, $k = n-a$ et pour tout entier k de l'intervalle $\llbracket 1, n-a-1 \rrbracket$.

- b) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n . En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ appartient à l'ensemble A étudié dans la question 1.
- c) Donner, pour tout entier naturel n non nul, les valeurs de u_n et de $\mathbf{P}(B_{n+1})$ en fonction de b , s et n .
- d) Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(\mathbf{P}(B_n))_{n \geq 1}$?

PROBLÈME

Dans tout le problème, on désigne par \mathcal{C} l'espace vectoriel des applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . À toute application f de \mathcal{C} , on associe l'application $D(f)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

Les parties **A**, **B** et **C** sont indépendantes.

Question préliminaire : D est-il un endomorphisme de \mathcal{C} ?

Partie A : Image par D d'une fonction de répartition

1. Soit F une application de \mathcal{C} . Rappeler les propriétés que doit posséder F pour être considérée comme une fonction de répartition.
2. Soit F une application de \mathcal{C} qui est une fonction de répartition et g l'application $D(F)$.
- a) Montrer que g est positive.

- b) Prouver, pour tout réel x , la double inégalité : $F(x) \leq \int_x^{x+1} F(t) dt \leq F(x+1)$.

En déduire que les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^{x+1} F(t) dt$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} F(t) dt$ existent et préciser leurs valeurs.

- c) Soit A et B deux réels vérifiant $A < 0 < B$ et $I(A, B)$ l'intégrale : $I(A, B) = \int_A^B g(t) dt$.

Justifier l'égalité : $I(A, B) = \int_B^{B+1} F(t) dt - \int_A^{A+1} F(t) dt$.

- d) Prouver alors soigneusement que g est une densité de probabilité.

3. Un exemple

On suppose, dans cette question, que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et on pose : $g = D(F)$.

Déterminer $g(x)$ pour tout réel x , en distinguant les cas $x < -1$, $-1 \leq x < 0$, $0 \leq x < 1$ et $1 \leq x$. Représenter graphiquement l'application g .

Partie B : Recherche des valeurs propres de D

Si λ est un réel, on dit que λ est une *valeur propre* de D s'il existe une application f de \mathcal{C} , distincte de l'application nulle, vérifiant : $D(f) = \lambda f$.

1. Soit a un réel. On note g_a l'application de \mathcal{C} définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = e^{ax}$. Déterminer l'application $D(g_a)$.
2. En déduire que tout réel λ strictement supérieur à -1 est une valeur propre de D .
3. Soit a un réel. On note h_a l'application de \mathcal{C} définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, h_a(x) = \sin(\pi x) e^{ax}$. Déterminer l'application $D(h_a)$.
4. En déduire que tout réel λ strictement inférieur à -1 est une valeur propre de D .
5. Le réel -1 est-il une valeur propre de D ?

Partie C : Image par D d'une application polynomiale

Pour tout entier naturel p , on désigne par E_p le sous-espace de \mathcal{C} dont les éléments sont les applications polynomiales de degré au plus p .

On note X l'application $x \mapsto x$ et, pour tout entier naturel non nul k , on note X^k l'application $x \mapsto x^k$.

Soit $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite d'applications polynomiales définie par :

$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad H_i = \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-1} (X - k)$$

1. Préciser H_1, H_2, H_3 et montrer que $\mathcal{U}_3 = (H_0, H_1, H_2, H_3)$ est une base de E_3 .
2. Soit $\mathcal{B}_3 = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E_3 .
 - a) Écrire la matrice de passage P de la base \mathcal{B}_3 à la base \mathcal{U}_3 et calculer la matrice P^{-1} .
 - b) Soit a_0, a_1, a_2, a_3 des réels et Q l'application polynomiale $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. Quelles sont les coordonnées de Q dans la base \mathcal{U}_3 ?
En particulier, vérifier l'égalité : $X^3 = H_1 + 6H_2 + 6H_3$.

3. Application : moment d'ordre 3 d'une variable aléatoire de Poisson

Soit a un réel strictement positif et Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a .

- a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k^3 a^k}{k!}$.
Transformer S_n à l'aide de la relation : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = H_1(k) + 6H_2(k) + 6H_3(k)$.
En déduire que la série de terme général $\frac{n^3 a^n}{n!}$ est convergente et préciser $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 a^n}{n!}$.
- b) En déduire que la variable aléatoire Z admet un moment d'ordre 3 donné par :

$$\mathbf{E}(Z^3) = a + 3a^2 + a^3$$

4. Dans cette question, p est un entier naturel non nul fixé.
 - a) Montrer que, si Q appartient à E_p , $D(Q)$ appartient aussi à E_p .
On note alors D_p l'endomorphisme de E_p qui, à tout Q de E_p , associe $D(Q)$.
 - b) Montrer que la famille $\mathcal{U}_p = (H_0, H_1, \dots, H_p)$ est une base de E_p .
 - c) Déterminer $D_p(H_0), D_p(H_1)$ et prouver, pour tout entier i vérifiant $0 < i \leq p$, l'égalité : $D_p(H_i) = H_{i-1}$.

- d) Écrire la matrice M_p représentative de D_p dans la base \mathcal{U}_p .
 e) Préciser la ou les valeurs propres de M_p . Cette matrice est-elle diagonalisable ?

5. Application : moment d'ordre p d'une variable aléatoire de Poisson

Soit p un entier naturel non nul fixé et b_0, b_1, \dots, b_p les réels vérifiant

$$X^p = b_0 H_0 + b_1 H_1 + \dots + b_p H_p$$

Par une méthode analogue à celle de la question **3.**, montrer que la variable aléatoire Z définie dans la question **3.** admet un moment d'ordre p donné par $\mathbf{E}(Z^p) = \sum_{i=0}^p \frac{b_i a^i}{i!}$.

- 6.** Dans cette question, p est un entier naturel non nul et, pour tout entier i vérifiant $0 \leq i \leq p$, on considère l'application φ_i de E_p dans \mathbb{R} qui, à tout élément Q de E_p , associe le réel :

$$\varphi_i(Q) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} C_i^k Q(k)$$

où C_i^k désigne le coefficient binomial d'indices i et k .

- a) Montrer que, pour tout entier i vérifiant $0 \leq i \leq p$, l'application φ_i est linéaire.
 b) Soit i et j deux entiers vérifiant $0 \leq i \leq p$ et $0 \leq j \leq p$; établir les égalités :

$$\varphi_i(H_i) = 1 \quad \text{et si } j \neq i, \quad \varphi_i(H_j) = 0$$

- c) En déduire, pour tout entier i vérifiant $0 \leq i \leq p$, la relation : $b_i = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} C_i^k k^p$.



ANNALES DE MATHÉMATIQUES 2003

ESC-PEAP MATH III 2003 VOIE E

CORRIGE

EXERCICE

1. Etude d'un ensemble de suites

QUESTION-a)

$$\begin{aligned}
 (x_n) \in A &\iff \forall n \geq 1, \\
 s(\alpha(n+1) + \beta) &= (s-1)(\alpha n + \beta) + b + n \\
 san + s\alpha + s\beta &= n(s\alpha - \alpha + 1) + \beta(s-1) + b \\
 s\alpha &= n(1-\alpha) - \beta + b \\
 n(1-\alpha) - \beta + b - s\alpha &= 0.
 \end{aligned}$$

Cette égalité doit avoir lieu pour tous les entiers $n \geq 1$. Si nous considérons la fonction polynomiale $x \mapsto (1-\alpha)x - \beta + b - s\alpha$, **ce polynôme admet une infinité de racines (tous les entiers naturels non nuls), ce polynôme est donc le polynôme nul : tous ses coefficients sont nuls.** On obtient donc le système $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = b - s\alpha = b - s. \end{cases}$

La suite $(v_n) = (\alpha n + \beta)$ appartient à A si et seulement si $\alpha = 1$ et $\beta = b - s$. $\forall n \geq 1, v_n = n + b - s$.

QUESTION-b)

Pour tout entier $n \geq 1$, on a : $sx_{n+1} = (s-1)x_n + b + n$ et $sv_{n+1} = (s-1)v_n + b + n$. Soustrayons membre à membre ces deux égalités, on obtient : $s(x_{n+1} - v_{n+1}) = (s-1)(x_n - v_n)$, soit $sy_{n+1} = (s-1)y_n$.

Par hypothèse a et b sont des entiers naturels non nuls donc $s = a + b \geq 2$. L'égalité précédente équivaut à : $\forall n \geq 1, y_{n+1} = \frac{s-1}{s}y_n$.

La suite (y_n) est géométrique, de raison $\frac{s-1}{s}$ et de premier terme $y_1 = x_1 - v_1 = x_1 + s - b - 1$.

$$\forall n \geq 1, y_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (x_1 + s - b - 1).$$

$$\text{Donc } x_n = y_n + v_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (x_1 + s - b - 1) + n + b - s.$$

2. Expression de la probabilité $P(B_{n+1})$ à l'aide de u_n .
QUESTION-a)

$P(B_1) = \frac{b}{s}$; la variable X_1 prend pour valeurs 0 et 1.

C'est une variable de Bernoulli, de paramètre $P(X_1 = 1) = P(B_1) = \frac{b}{s}$.

Donc, $u_1 = \frac{b}{s}$.

QUESTION-b)

Les événements B_1 et $\overline{B_1}$ forment un système complet d'événements. Appliquons la formule des probabilités totales à l'événement B_2 .

$$P(B_2) = P(B_1)P(B_2/B_1) + P(\overline{B_1})P(B_2/\overline{B_1}).$$

* Si l'événement B_1 est réalisé, l'urne à la même configuration à l'issue du premier tirage qu'initialement, donc $P(B_2/B_1) = \frac{b}{s}$;

* Si l'événement $\overline{B_1}$ est réalisé, l'urne contient $b + 1$ boules blanches (on en a rajouté une) et $a - 1$ boules noires (on n'a pas remis celle que l'on a tirée) ; donc $P(B_2/\overline{B_1}) = \frac{b+1}{s}$.

La formule des probabilités totales donne : $P(B_2) = \left(\frac{b}{s}\right)^2 + \frac{a}{s} \frac{b+1}{s}$.

Vérifions l'égalité :

$$P(B_2) = \frac{1}{s} \left(\frac{b(a+b)}{s} + \frac{a}{s} \right) = \frac{1}{s} \left(b + \frac{s-b}{s} \right) = \frac{1}{s} (b+1-u_1), \text{ car } a+b=s \text{ et } a=s-b.$$

QUESTION-c)

Remarque : A l'issue d'un tirage quelconque, le nombre de boules blanches n'a pas diminué (il est resté stationnaire ou il a augmenté d'une unité), le nombre de boules noires n'a pas augmenté (il est resté stationnaire ou il a diminué d'une unité) : **on ne peut donc pas tirer plus de a boules noires.**

• $\boxed{\text{Si } 1 \leq n \leq a \text{ et } 0 \leq k \leq n}$, alors $0 \leq n-k \leq n$ et donc a fortiori $0 \leq n-k \leq a$. Or $(X_n = k)$ veut dire que l'on a tiré k boules blanches au cours des n premiers tirages, donc on en a tiré $n-k$ noires avec $0 \leq n-k \leq a$, ce qui est tout-à-fait possible.

Aucun des événements $(X_n = k)$ pour $0 \leq k$ n'est impossible.

La probabilité conditionnelle $P(B_{n+1}/X_n = k)$ a un sens puisque

$P(X_n = k) > 0$. Quand l'événement $(X_n = k)$ est réalisé, la composition de l'urne est la suivante : $a - (n-k)$ boules noires et $b + n - k$ boules blanches.

$$\boxed{P(B_{n+1}/X_n = k) = \frac{b+n-k}{s}}$$

Remarque : Puisque tous les événements $(X_n = k)$ sont possibles pour $0 \leq k \leq n$ et qu'évidemment $X_n(\Omega) \subset \llbracket 0; n \rrbracket$, on en conclut que $X_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.

• Appliquons la formule des probabilités totales à l'événement B_{n+1} pour le système complet d'événements $\{(X_n = k), (0 \leq k \leq n)\}$.

$$\begin{aligned}
 P(B_{n+1}) &= \sum_{k=0}^n P(B_{n+1}/X_n = k)P(X_n = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{b+n-k}{s} P(X_n = k) \\
 &= \frac{b+n}{s} \underbrace{\sum_{k=0}^n P(X_n = k)}_{=1} - \frac{1}{s} \underbrace{\sum_{k=0}^n kP(X_n = k)}_{=E(X_n)}
 \end{aligned}$$

Quand $1 \leq n \leq a$, $P(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$.

QUESTION-d)

Nous sommes dans le cas $n > a$.

- Si $0 \leq k \leq n - a - 1$, alors $n - k \geq a + 1 > a$. L'événement $(X_n = k)$ est impossible puisqu'il veut dire également que l'on a tiré $n - k$ boules noires, c'est à dire strictement plus que a et cela est impossible.

Donc $X_n(\Omega) \subset \llbracket n - a; n \rrbracket$

- Si $n - a \leq k \leq n$, alors $n - k \leq a$. Aucun des événements $(X_n = k)$ n'est impossible. Donc $X_n(\Omega) = \llbracket n - a; n \rrbracket$.

Le même calcul que dans le c) (les conditions sont identiques) donne

$$P(B_{n+1}/X_n = k) = \frac{b+n-k}{s}.$$

$$\begin{aligned}
 P(B_{n+1}) &= \sum_{k=n-a}^n P(B_{n+1}/X_n = k)P(X_n = k) \\
 &= \sum_{k=n-a}^n \frac{b+n-k}{s} P(X_n = k) \\
 &= \frac{b+n}{s} \underbrace{\sum_{k=n-a}^n P(X_n = k)}_{=1} - \frac{1}{s} \underbrace{\sum_{k=n-a}^n kP(X_n = k)}_{=E(X_n)}
 \end{aligned}$$

Quand $n > a$, $P(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$.

Conclusion : $\forall n \geq 1$, $P(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$.

3. Calcul des nombres u_n et $P(B_n)$.

Remarque : L'énoncé ne précise pas la position de a par rapport à n . Si $n+1-a < 0$, k peut être strictement négatif. Dans ce cas, on ne peut pas conditionner par l'événement $(X_n = k)$ dont le probabilité est nulle. Il y a donc obligation de discuter suivant a .

QUESTION-a)

- **Premier cas :** $1 \leq n \leq a$.

Dans ce cas, $X_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ d'après la question 2.b)

Or $1 \leq n \leq a \implies 2 \leq n+1 \leq a+1 \implies 2-a \leq n+1-a \leq 1$; donc prendre k dans $\llbracket n+1-a; n \rrbracket$ reviendra à prendre k dans $\llbracket 0; n \rrbracket$ ou $\llbracket 1; n \rrbracket$ (les valeurs négatives de k donnant des événements impossibles).

* Pour $1 \leq k \leq n$, les événements $X_n = k-1$ et $X_n = k$ sont possibles, les probabilités conditionnelles ont un sens.

Appliquons la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements ($X_n = j$), $0 \leq j \leq n$.

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= \sum_{j=0}^n P(X_{n+1} = k / X_n = j) P(X_n = j) \\ &= P(X_{n+1} = k / X_n = k) P(X_n = k) + \\ &\quad P(X_{n+1} = k / X_n = k-1) P(X_n = k-1) \end{aligned}$$

Les autres probabilités conditionnelles sont nulles : en effet, on peut ajouter **au mieux** une boule blanche au total des n premiers tirages lorsque l'on effectue le suivant : si $j \leq k-2$ ou si $j \geq k+1$ alors $P(X_{n+1} = k / X_n = j) = 0$. Dans le premier cas il faudrait au $(n+1)$ ème tirage rajouter au moins deux boules blanches et dans le second, il faudrait en enlever.

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= P(X_{n+1} = k / X_n = k) P(X_n = k) + \\ &\quad P(X_{n+1} = k / X_n = k-1) P(X_n = k-1) \\ &= P(\overline{B_{n+1}} / X_n = k) P(X_n = k) + \\ &\quad P(\overline{B_{n+1}} / X_n = k-1) P(X_n = k-1) \\ &= \left(1 - \frac{b+n-k}{s}\right) P(X_n = k) + \frac{b+n-(k-1)}{s} P(X_n = k-1) \\ &= \frac{a-n+k}{s} P(X_n = k) + \frac{b+n-k+1}{s} P(X_n = k-1) \end{aligned}$$

Pour $k = 0$.

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P(X_n = 0) P(X_{n+1} = 0 / X_n = 0) \\ &= P(\overline{B_{n+1}} / X_n = 0) P(X_n = 0) \\ &= \left(1 - \frac{b+n}{s}\right) P(X_n = 0) = \frac{a-n}{s} P(X_n = 0) \\ &= \frac{a-n+0}{s} P(X_n = 0) + \frac{b+n-0+1}{s} \underbrace{P(X_n = 0-1)}_{=0} \end{aligned}$$

Si $1 \leq n \leq a$, $\forall k \in \llbracket n+1-a; n \rrbracket$,

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{a-n+k}{s} P(X_n = k) + \frac{b+n-k+1}{s} P(X_n = k-1)$$

* Si $k = n+1$,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = n+1) &= P(X_n = n) P(X_{n+1} = n+1 / X_n = n) \\ &= P(B_{n+1} / X_n = n) P(X_n = n) = \frac{b+n-n}{s} P(X_n = n) \\ &= \frac{b+n-n-1+1}{s} P(X_n = n) \\ &\quad + \frac{a-n+n+1}{s} \underbrace{P(X_n = n+1)}_{=0} \end{aligned}$$

La formule est valable pour $k = n+1$.

* Pour $k = n-a$.

$(X_{n+1} = n-a)$ est impossible car alors $n+1 - (n-a) = a+1 > a$: il aurait fallu tirer $a+1$ boules noires.

Dans la formule, la fraction $\frac{a-n+k}{s}$ vaut 0, et l'événement $(X_n = k-1) = (X_n = n-a-1)$ est impossible car $n - (n-a-1) = a+1 > a$.

La formule est valable pour $k = n-a$, tous les termes y sont nuls.