



## ESCP 2004 math III. Durée 4 heures

### EXERCICE

On désigne par  $E$  l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^6$  et par  $\mathcal{B}$  sa base canonique :  $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6)$ .

On pose  $\mathcal{B}_1 = (e_1; e_2; e_3)$  et  $\mathcal{B}_2 = (e_4; e_5; e_6)$  et on désigne respectivement par  $E_1$  et  $E_2$  les sous-espaces vectoriels de  $E$  engendrés par  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ .

Enfin,  $A$  est la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Soit  $u$  l'endomorphisme de  $E_1$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}_1$  est  $A$ .  
Déterminer les valeurs propres de  $u$  ainsi qu'une base de vecteurs propres.
2. Soit  $f$  l'application linéaire de  $E_1$  vers  $E_2$  définie par :  $f(e_1) = e_4$ ,  $f(e_2) = e_5$  et  $f(e_3) = e_6$ .  
Montrer que  $f$  est un isomorphisme et déterminer la matrice de son isomorphisme réciproque  $f^{-1}$  relativement aux bases  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_1$ .
3. a) Montrer que, si  $(x_1; x_2)$  est un élément de  $E_1 \times E_2$  vérifiant l'égalité  $x_1 + x_2 = 0$ , les vecteurs  $x_1$  et  $x_2$  sont nuls.  
b) En déduire que, si  $(x_1; x_2)$  et  $(y_1; y_2)$  sont deux éléments de  $E_1 \times E_2$  vérifiant l'égalité  $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ , alors on a :  $x_1 = y_1$  et  $x_2 = y_2$ .
4. Pour tout vecteur  $x$  de  $E$  dont les coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4; \lambda_5; \lambda_6)$ , on pose :  
 $x_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$ ,  $x_2 = \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6$  et  $F(x) = u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2)$ 
  - a) Prouver que l'application  $F$  qui à tout vecteur  $x$  de  $E$  associe le vecteur  $F(x)$ , est un endomorphisme de  $E$ .
  - b) Déterminer le noyau de  $F$  et en déduire que  $F$  est un automorphisme.
  - c) Montrer que la matrice  $M$  de  $F$  dans la base  $B$  peut s'écrire sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. On suppose, dans cette question, que  $\mu$  est une valeur propre de  $F$  et que  $x$  est un vecteur propre associée à  $\mu$ ; on définit les vecteurs  $x_1$  de  $E_1$  et  $x_2$  de  $E_2$  comme dans la question précédente.
  - a) Justifier que la valeur propre  $\mu$  n'est pas nulle.
  - b) Utiliser les résultats de la question 3. pour prouver que les vecteurs  $x_1$  et  $x_2$  sont tous les deux non nuls et que  $x_1$  est un vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\mu - 1/\mu$ .
6. Étudier la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $\varphi(x) = x - 1/x$  et en donner une représentation graphique.
7. On suppose, dans cette question, que  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  et que  $x_1$  est un vecteur propre de  $u$  associée à  $\lambda$ .
  - a) Montrer que l'équation d'inconnue  $\mu$  suivante :  $\lambda = \mu - 1/\mu$  admet deux solutions distinctes  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

- b) Montrer que  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont des valeurs propres de  $F$ . Donner, en fonction de  $x_1$ , un vecteur propre de  $F$  associé à  $\mu_1$  et un vecteur propre de  $F$  associé à  $\mu_2$ .

8. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

### PROBLÈME

Dans tout le problème,  $r$  désigne un entier naturel vérifiant  $1 \leq r \leq 10$ .

Une urne contient 10 boules distinctes  $B_1, B_2, \dots, B_{10}$ . Une expérience aléatoire consiste à effectuer une suite de tirages d'une boule **avec remise**, chaque boule ayant la même probabilité de sortir à chaque tirage. Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ .

#### **Partie I : Étude du nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules $B_1, \dots, B_r$ .**

On suppose que le nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules  $B_1, \dots, B_r$  définit une variable aléatoire  $Y_r$  sur  $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ .

1. Cas particulier  $r = 1$ . Montrer que la variable aléatoire  $Y_1$  suit une loi géométrique ; préciser son paramètre, son espérance et sa variance.
2. On suppose que  $r$  est supérieur ou égal à 2.
  - a) Calculer la probabilité pour que les  $r$  boules  $B_1, \dots, B_r$  sortent dans cet ordre aux  $r$  premiers tirages.
  - b) En déduire la probabilité  $P(Y_r = r)$ .
  - c) Préciser l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire  $Y_r$ .
3. On suppose encore que  $r$  est supérieur ou égal à 2. Pour tout entier  $i$  vérifiant  $1 \leq i \leq r$ , on désigne par  $W_i$  la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois,  $i$  boules distinctes parmi les boules  $B_1, \dots, B_r$  soient sorties (en particulier, on a :  $W_r = Y_r$ ).  
On pose :  $X_1 = W_1$  et, pour tout  $i$  vérifiant  $2 \leq i \leq r$ ,  $X_i = W_i - W_{i-1}$ .  
On admet que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_r$  sont indépendantes.
  - a) Exprimer la variable aléatoire  $Y_r$  à l'aide des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_r$ .
  - b) Interpréter concrètement la variable aléatoire  $X_i$  pour tout  $i$  vérifiant  $1 \leq i \leq r$ .
  - c) Montrer que, pour tout  $i$  vérifiant  $1 \leq i \leq r$ , la variable aléatoire  $X_i$  suit une loi géométrique ; préciser son espérance et sa variance.
  - d) On pose :  $S_1(r) = \sum_{k=1}^r \frac{1}{k}$  et  $S_2(r) = \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^2}$ .

Exprimer l'espérance  $E(Y_r)$  et la variance  $V(Y_r)$  de  $Y_r$  à l'aide de  $S_1(r)$  et de  $S_2(r)$ .

4. a) Si  $k$  est un entier naturel non nul, préciser le minimum et le maximum de la fonction  $t \mapsto 1/t$  sur

l'intervalle  $[k; k+1]$  et en déduire un encadrement de l'intégrale  $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$ .

- b) Si  $r$  est supérieur ou égal à 2, donner un encadrement de  $S_1(r)$  et en déduire la double inégalité :  $10 \ln(r+1) \leq E(Y_r) \leq 10(\ln(r)+1)$
- c) Si  $r$  est supérieur ou égal à 2, établir par une méthode analogue à celle de la question précédente, la double inégalité :  $1 - 1/(r+1) \leq S_2(r) \leq 2 - 1/r$ . En déduire un encadrement de  $V(Y_r)$ .

**Partie II : Étude du nombre de boules distinctes parmi les boules  $B_1, \dots, B_r$  tirées au moins une fois au cours des  $n$  premiers tirages .**

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on suppose que le nombre de boules distinctes parmi les boules  $B_1, \dots, B_r$  tirées au moins une fois au cours des  $n$  premiers tirages, définit une variable aléatoire  $Z_n$  sur  $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ ; on note  $E(Z_n)$  l'espérance de  $Z_n$  et on pose  $Z_0 = 0$ .

Pour tout entier naturel  $n$  non nul et pour tout entier naturel  $k$ , on note  $p_{n;k}$  la probabilité de l'événement  $(Z_n = k)$  et on pose :  $p_{n;-1} = 0$ .

1. Étude des cas particuliers  $n = 1$  et  $n = 2$ .

a) Déterminer la loi de  $Z_1$  et donner son espérance.

b) On suppose, dans cette question, que  $r$  est supérieur ou égal à 2. Déterminer la loi de  $Z_2$  et montrer que son espérance est donnée par :  $E(Z_2) = 19r/100$ .

2. Établir, pour tout entier naturel  $n$  non nul et pour tout entier naturel  $k$  au plus égal à  $r$ , l'égalité :

$$(1) \quad 10 p_{n;k} = (10 - r + k) p_{n-1;k} + (r + 1 - k) p_{n-1;k-1}$$

Vérifier que cette égalité reste vraie dans le cas où  $k$  est supérieur ou égal à  $r + 1$ .

3. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on définit le polynôme  $Q_n$  par : pour tout réel  $x$ ,

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n p_{n;k} x^k \text{ on pose } Q_0(x) = 1.$$

a) Préciser les polynômes  $Q_1$  et  $Q_2$ .

b) Calculer  $Q_n(1)$  et exprimer  $Q'_n(1)$  en fonction de  $E(Z_n)$ ,  $Q'_n$  désignant la dérivée du polynôme  $Q_n$ .

c) En utilisant l'égalité (1), établir, pour tout réel  $x$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul, la relation suivante : (2)  $10 Q_n(x) = (10 - r + rx) Q_{n-1}(x) + x(1 - x) Q'_{n-1}(x)$

d) En dérivant membre à membre l'égalité (2), former, pour tout entier naturel  $n$  non nul, une relation entre les espérances  $E(Z_n)$  et  $E(Z_{n-1})$ .

En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , la valeur de  $E(Z_n)$  en fonction de  $n$  et de  $r$ .

4. a) Pour tout entier naturel  $n$ , le polynôme  $Q''_n$  désigne la dérivée du polynôme  $Q'_n$ .

En utilisant une méthode semblable à celle de la question précédente, trouver pour tout entier naturel  $n$  non nul, une relation entre  $Q''_n(1)$  et  $Q''_{n-1}(1)$ .

En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'égalité suivante :

$$Q''_n(1) = r(r-1)(1 + (8/10)^n - 2(9/10)^n)$$

b) Calculer, pour tout entier naturel  $n$ , la variance de la variable aléatoire  $Z_n$  en fonction de  $n$  et de  $r$ .



ANNALES DE MATHEMATIQUES 2004

ESCP-EAP 2004 VOIE E

CORRIGE

EXERCICE

1.

$\lambda$  est valeur propre de  $u$  si et seulement si la matrice  $A - \lambda I_3$  n'est pas inversible ( $I_3$  est la matrice unité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ), c'est-à-dire si le système  $(S) : (A - \lambda I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  n'est pas un système de Cramer. Ce système est :

$$\begin{cases} -\lambda x + 2y + z = 0 \\ 2x - \lambda y + z = 0 \\ -2x + 2y - (1 + \lambda)z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} 2x - \lambda y + z = 0 \\ -\lambda x + 2y + z = 0 \\ -2x + 2y - (1 + \lambda)z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow -2L_2 + \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow -L_3 + L_1}} \begin{cases} 2x - \lambda y + z = 0 \\ (4 - \lambda^2)y + (2 + \lambda)z = 0 \\ (2 - \lambda)y - \lambda z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} 2x - \lambda y + z = 0 \\ (2 - \lambda)y - \lambda z = 0 \\ (2 - \lambda)(2 + \lambda)y + (2 + \lambda)z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3 - (2 + \lambda)L_2} \begin{cases} 2x - \lambda y + z = 0 \\ (2 - \lambda)y - \lambda z = 0 \\ (2 + \lambda)(1 + \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Le dernier système est triangulaire supérieur, **il n'est pas de Cramer si et seulement si l'un des termes diagonaux est nul** c'est-à-dire  $2 - \lambda = 0$  ou  $(2 + \lambda)(1 + \lambda) = 0$

L'ensemble des valeurs propres de  $u$  est  $\text{spect}(u) = \{-2, -1, 2\}$

**Détermination des sous-espaces propres  $E(\lambda, u)$  :**

\* Pour  $\lambda = -2$ , le système  $(S)$  devient

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 4y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -2y \\ x = 0 \end{cases}$$

$$E(-2, u) = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E_1 / x = 0 \text{ et } z = -2y\} = \{y(e_2 - 2e_3) \in E_1 / y \in \mathbb{R}\}$$

$$E(-2, u) = \text{vect}(e_2 - 2e_3) = \text{vect}((0, 1, -2, 0, 0, 0))$$

\* Pour  $\lambda = -1$ , le système  $(S)$  devient

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -3y \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -3y \\ x = y \end{cases}$$

$$E(-1, u) = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E_1 / x = y \text{ et } z = -3y\} = \{y(e_1 + e_2 - 3e_3) \in E_1 / y \in \mathbb{R}\}$$

$$E(-1, u) = \text{vect}(e_1 + e_2 - 3e_3) = \text{vect}((1, 1, -3, 0, 0, 0))$$

\* Pour  $\lambda = 2$ , le système **(S)** devient

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ -2z = 0 \\ 12z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$E(2, u) = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E_1 / x = y \text{ et } z = 0\} = \{x(e_1 + e_2) \in E_1 / x \in \mathbb{R}\}$$

$$E(2, u) = \text{vect}(e_1 + e_2) = \text{vect}((1, 1, 0, 0, 0, 0))$$

L'endomorphisme  $u$  est diagonalisable car  $u$  est un endomorphisme d'un espace de dimension 3 et possède 3 valeurs propres distinctes : condition suffisante de diagonalisation satisfaite. On aurait pu dire aussi que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de  $E_1$  : c'est alors une condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

On obtient une base de  $E_1$  en prenant la famille  $e'_1 = e_2 - 2e_3$ ,  $e'_2 = e_1 + e_2 - 3e_3$ ,  $e'_3 = e_1 + e_2$

**2.**

$f$  est une application linéaire de  $E_1$  dans  $E_2$  qui ont tous les deux pour dimension 3 ;

$f$  transforme la base  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $E_1$  en la base  $(e_4, e_5, e_6)$  de  $E_2$  : c'est un isomorphisme de  $E_1$  dans  $E_2$

Si l'on veut la matrice de  $f$  dans les bases  $B_1$  de  $E_1$  et  $B_2$  de  $E_2$ , il faut donner en colonne les coordonnées de  $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$  dans la base  $(e_4, e_5, e_6)$ . Or  $f(e_1) = e_4$ , donc la liste des coordonnées de  $f(e_1)$  dans  $B_2$  est  $(1, 0, 0)$  ; de même la liste des coordonnées de  $f(e_2)$  dans  $B_2$  est  $(0, 1, 0)$  et celle de  $f(e_3)$  est  $(0, 0, 1)$ .

La matrice de  $f$  dans les bases  $B_1, B_2$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  : c'est  $I_3$

**Remarque** : Cette matrice est évidemment inversible et l'on retrouve ainsi que  $f$  est un isomorphisme de  $E_1$  dans  $E_2$ .

$f^{-1}$  a donc pour matrice dans les bases  $B_2, B_1$  la matrice inverse de  $f$ , donc  $I_3$  ; il s'ensuit que

la matrice de  $f^{-1}$  dans les bases  $B_2, B_1$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  : c'est également  $I_3$

**Remarque** : Cela veut dire que  $f^{-1}(e_4) = e_1$ ,  $f^{-1}(e_5) = e_2$ ,  $f^{-1}(e_6) = e_3$ .

**3-a)**

Soit  $x_1 \in E_1$ , alors il existe  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ . De même il existe  $(a_4, a_5, a_6) \in \mathbb{R}^3 / x_2 = a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6$ .

$x_1 + x_2 = 0 \iff \sum_{k=1}^6 a_k e_k = 0 \iff \forall k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket, a_k = 0$ , car  $(e_1, \dots, e_6)$  est une famille libre, donc  $x_1 = x_2 = 0$ .

**3-b)**

Si  $(x_1, x_2)$  et  $(y_1, y_2)$  sont deux éléments de  $E_1 \times E_2$  tels que  $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ , alors on a  $x_1 - y_1 + x_2 - y_2 = 0$ . Posons  $z_1 = x_1 - y_1$ , alors  $z_1 \in E_1$  car  $E_1$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  (dès qu'il contient deux vecteurs, il contient leur différence) ; de même

$z_2 = x_2 - y_2 \in E_2$ . d'après **a)**, il vient  $z_1 = z_2 = 0$ , soit  $x_1 = y_1$  et  $x_2 = y_2$

**Remarque** : Ce résultat était prévisible, car  $E_1$  et  $E_2$  sont supplémentaires dans  $E$  ; tout vecteur de  $E$  se décompose alors de manière unique en la somme d'un vecteur de  $E_1$  et d'un vecteur de  $E_2$  ; c'est la cas  $x_1 + x_2$  qui est un vecteur de  $E$ .

**4-a)**

Soit  $x = x_1 + x_2$  ;  $u(x_1)$  est un vecteur de  $E_1$  puisque  $u \in \mathcal{L}(E_1)$  , donc de  $E$  ;  $f(x_1)$  est un vecteur de  $E_2$  puisque  $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ , donc de  $E$  et  $f^{-1}(x_2)$  est aussi un vecteur de  $E_1$  puisque  $f^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$  : donc la somme  $u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2)$  appartient à  $E$ .

**$F$  est une application de  $E$  dans  $E$**

D'après la remarque précédente, tout vecteur  $x$  de  $E$  se décompose de manière unique en la somme  $x_1 + x_2$  où  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$ . De même pour  $y \in E \exists!(y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$  tel que  $y = y_1 + y_2$  . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $x + \lambda y = (x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2)$  où  $x_1 + \lambda y_1 \in E_1$  et  $x_2 + \lambda y_2 \in E_2$  ; donc par définition de  $F$ .

$$\begin{aligned} F(x + \lambda y) &= u(x_1 + \lambda y_1) + f(x_1 + \lambda y_1) + f^{-1}(x_2 + \lambda y_2) \\ &= u(x_1) + \lambda u(y_1) + f(x_1) + \lambda f(y_1) + f^{-1}(x_2) + \lambda f^{-1}(y_2) \\ &\quad \text{par linéarité de } u, f, f^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x + \lambda y) &= u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2) + \lambda(u(y_1) + f(y_1) + f^{-1}(y_2)) \\ &= F(x) + \lambda F(y) \end{aligned}$$

$F$  est donc une application linéaire de  $E$  dans  $E$  :  $F \in \mathcal{L}(E)$

**Remarque** : Il y avait une démonstration pour les lecteurs qui connaissent les projecteurs (ou les projections).

Soit  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$  . N'oublions pas que  $E_1$  et  $E_2$  sont supplémentaires dans  $E$ . L'application  $x \mapsto x_1$  est la projection de  $E$  sur  $E_1$  de direction  $E_2$  que nous noterons  $p_1$  : c'est un endomorphisme de  $E$  ; l'application  $x \mapsto x_2$  est la projection de  $E$  sur  $E_2$  de direction  $E_1$  que nous noterons  $p_2$  : c'est un endomorphisme de  $E$  . On a donc  $x_1 = p_1(x)$  et  $x_2 = p_2(x)$ , donc

$$\begin{aligned} F(x) &= u(p_1(x)) + f(p_1(x)) + f^{-1}(p_2(x)) \\ &= (u \circ p_1)(x) + (f \circ p_1)(x) + f^{-1}(p_2(x)) \\ &= (u \circ p_1 + f \circ p_1 + f^{-1} \circ p_2)(x) \end{aligned}$$

$$F = u \circ p_1 + f \circ p_1 + f^{-1} \circ p_2 ;$$

**c'est une somme d'endomorphismes de  $E$ , c'est donc un endomorphisme de  $E$ .**

**4-b)**

Soit  $x \in \text{Ker } F$  ,  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$ .

$$F(x) = u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2) = \underbrace{u(x_1) + f^{-1}(x_2)}_{\in E_1} + \underbrace{f(x_1)}_{\in E_2}$$

$$\begin{aligned} F(x) = 0 &\iff (u(x_1) + f^{-1}(x_2)) + f(x_1) = 0 \text{ donc d'après la question } \mathbf{3. a)} \\ &\quad u(x_1) + f^{-1}(x_2) = f(x_1) = 0. \end{aligned}$$

Comme  $f$  est un isomorphisme de  $E_1$  dans  $E_2$  ,  $f(x_1) = 0 \iff x_1 = 0$ . L'égalité  $u(x_1) + f^{-1}(x_2) = 0$  devient alors  $f^{-1}(x_2) = 0$  et comme  $f^{-1}$  est un isomorphisme de  $E_2$  dans  $E_1$ , on a  $x_2 = 0$  : finalement  $x_1 + x_2 = x = 0$

L'égalité  $F(x) = 0 \iff x = 0$ , donc  $\text{Ker } F = \{0\}$  :  $F$  est un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie (ici 6) :  $F$  est un automorphisme de  $E$