ESCP 2004 math III. Durée 4 heures

EXERCICE

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^6$ et par $\mathcal{B}$ sa base canonique : $\mathcal{B} = (e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4 ; e_5 ; e_6)$.

On pose $\mathcal{B}_1 = (e_1 ; e_2 ; e_3)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_4 ; e_5 ; e_6)$ et on désigne respectivement par E_1 et E_2 les sous-espaces vectoriels de E engendrés par $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Enfin, A est la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels suivante : $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Soit u l'endomorphisme de E_1 dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_1$ est A.
Déterminer les valeurs propres de u ainsi qu'une base de vecteurs propres.

2. Soit f l'application linéaire de E_1 vers E_2 définie par : $f(e_1) = e_4$, $f(e_2) = e_5$ et $f(e_3) = e_6$.
Montrer que f est un isomorphisme et déterminer la matrice de son isomorphisme réciproque f^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$.

3. a) Montrer que, si $(x_1 ; x_2)$ est un élément de $E_1 \times E_2$ vérifiant l'égalité $x_1 + x_2 = 0$, les vecteurs x_1 et x_2 sont nuls.

b) En déduire que, si $(x_1 ; x_2)$ et $(y_1 ; y_2)$ sont deux éléments de $E_1 \times E_2$ vérifiant l'égalité $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, alors on a : $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$.

4. Pour tout vecteur x de E dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(\lambda_1 ; \lambda_2 ; \lambda_3 ; \lambda_4 ; \lambda_5 ; \lambda_6)$, on pose :

$x_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$, $x_2 = \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6$ et $F(x) = u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2)$

a) Prouver que l'application F qui à tout vecteur x de E associe le vecteur $F(x)$, est un endomorphisme de E.

b) Déterminer le noyau de F et en déduire que F est un automorphisme.

c) Montrer que la matrice M de F dans la base B peut s'écrire sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. On suppose, dans cette question, que μ est une valeur propre de F et que x est un vecteur propre associée à μ ; on définit les vecteurs x_1 de E_1 et x_2 de E_2 comme dans la question précédente.

a) Justifier que la valeur propre μ n'est pas nulle.

b) Utiliser les résultats de la question **3.** pour prouver que les vecteurs x_1 et x_2 sont tous les deux non nuls et que x_1 est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\mu - 1/\mu$.

6. Étudier la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = x - 1/x$ et en donner une représentation graphique.

7. On suppose, dans cette question, que λ est une valeur propre de u et que x_1 est un vecteur propre de u associée à λ.

a) Montrer que l'équation d'inconnue μ suivante : $\lambda = \mu - 1/\mu$ admet deux solutions distinctes μ_1 et μ_2.

b) Montrer que μ_1 et μ_2 sont des valeurs propres de F. Donner, en fonction de x_1, un vecteur propre de F associé à μ_1 et un vecteur propre de F associé à μ_2.

8. La matrice M est-elle diagonalisable ?

PROBLÈME

Dans tout le problème, r désigne un entier naturel vérifiant $1 \leq r \leq 10$.
Une urne contient 10 boules distinctes $B_1, B_2, \ldots, B_{10}$. Une expérience aléatoire consiste à y effectuer une suite de tirages d'une boule **avec remise**, chaque boule ayant la même probabilité de sortir à chaque tirage. Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega ; \mathcal{A} ; P)$.

Partie I : Étude du nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules $B_1, \ldots, B_r$.

On suppose que le nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules $B_1, \ldots, B_r$ définit une variable aléatoire Y_r sur $(\Omega ; \mathcal{A} ; P)$.

1. Cas particulier $r = 1$. Montrer que la variable aléatoire Y_1 suit une loi géométrique ; préciser son paramètre, son espérance et sa variance.

2. On suppose que r est supérieur ou égal à 2.
a) Calculer la probabilité pour que les r boules $B_1, \ldots, B_r$ sortent dans cet ordre aux r premiers tirages.
b) En déduire la probabilité $P((Y_r = r))$.
c) Préciser l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y_r.

3. On suppose encore que r est supérieur ou égal à 2. Pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq r$, on désigne par W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$ soient sorties (en particulier, on a : $W_r = Y_r$).
On pose : $X_1 = W_1$ et, pour tout i vérifiant $2 \leq i \leq r$, $X_i = W_i - W_{i-1}$.
On admet que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_r$ sont indépendantes.

a) Exprimer la variable aléatoire Y_r à l'aide des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_r$.
b) Interpréter concrètement la variable aléatoire X_i pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq r$.
c) Montrer que, pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq r$, la variable aléatoire X_i suit une loi géométrique ; préciser son espérance et sa variance.
d) On pose : $S_1(r) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k}$ et $S_2(r) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2}$.
Exprimer l'espérance $E(Y_r)$ et la variance $V(Y_r)$ de Y_r à l'aide de $S_1(r)$ et de $S_2(r)$.

4. a) Si k est un entier naturel non nul, préciser le minimum et le maximum de la fonction $t \mapsto 1/t$ sur l'intervalle $[k ; k+1]$ et en déduire un encadrement de l'intégrale $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} \, dt$.
b) Si r est supérieur ou égal à 2, donner un encadrement de $S_1(r)$ et en déduire la double inégalité :
$$10 \ln(r+1) \leq E(Y_r) \leq 10 (\ln(r) + 1)$$
c) Si r est supérieur ou égal à 2, établir par une méthode analogue à celle de la question précédente, la double inégalité : $1 - 1/(r+1) \leq S_2(r) \leq 2 - 1/r$ · En déduire un encadrement de $V(Y_r)$.

Partie II : Étude du nombre de boules distinctes parmi les boules $B_1, \dots, B_r$ tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages .

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , on suppose que le nombre de boules distinctes parmi les boules $B_1, \dots, B_r$ tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages, définit une variable aléatoire Z_n sur $(\Omega ; \mathscr{A} ; P)$; on note $E(Z_n)$ l'espérance de Z_n et on pose $Z_0 = 0$.
Pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k , on note $p_{n\,;\,k}$ la probabilité de l'événement $(Z_n = k)$ et on pose : $p_{n\,;\,-1} = 0$.

1. Étude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

a) Déterminer la loi de Z_1 et donner son espérance.

b) On suppose, dans cette question, que r est supérieur ou égal à 2 . Déterminer la loi de Z_2 et montrer que son espérance est donnée par : $E(Z_2) = 19\,r / 100$ ·

2. Établir, pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k au plus égal à r , l'égalité :

$$\textbf{(1)} \qquad 10\,p_{n\,;\,k} = (10 - r + k)\,p_{n-1\,;\,k} + (r + 1 - k)\,p_{n-1\,;\,k-1}$$

Vérifier que cette égalité reste vraie dans le cas où k est supérieur ou égal à $r + 1$.

3. Pour tout entier naturel non nul n , on définit le polynôme Q_n par : pour tout réel x ,

$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n\,;\,k}\, x^k$ on pose $Q_0(x) = 1$.

a) Préciser les polynômes Q_1 et Q_2 .

b) Calculer $Q_n(1)$ et exprimer $Q'_n(1)$ en fonction de $E(Z_n)$, Q'_n désignant la dérivée du polynôme Q_n .

c) En utilisant l'égalité **(1)** , établir, pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul, la relation suivante : **(2)** $\qquad 10\,Q_n(x) = (10 - r + r\,x)\,Q_{n-1}(x) + x(1 - x)\,Q'_{n-1}(x)$

d) En dérivant membre à membre l'égalité **(2)** , former, pour tout entier naturel n non nul, une relation entre les espérances $E(Z_n)$ et $E(Z_{n-1})$.
En déduire, pour tout entier naturel n , la valeur de $E(Z_n)$ en fonction de n et de r .

4. a) Pour tout entier naturel n , le polynôme Q''_n désigne la dérivée du polynôme Q'_n .
En utilisant une méthode semblable à celle de la question précédente, trouver pour tout entier naturel n non nul, une relation entre $Q''_n(1)$ et $Q''_{n-1}(1)$.
En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$Q''_n(1) = r\,(r-1)\,(1 + (8/10)^n - 2\,(9/10)^n)$$

b) Calculer, pour tout entier naturel n , la variance de la variable aléatoire Z_n en fonction de n et de r .

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2004

ESCP-EAP 2004 VOIE E

CORRIGE

EXERCICE

1.

λ est valeur propre de u si et seulement si la matrice $A-\lambda I_3$ n'est pas inversible (I_3 est la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) , c'est-à-dire si le système **(S)** : $(A-\lambda I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ n'est pas un système de Cramer. Ce système est :

$$\left\{\begin{aligned}-\lambda x+2y+z&=0\\2x-\lambda y+z&=0\\-2x+2y-(1+\lambda)z&=0\end{aligned}\right.\xrightarrow[L_1\longleftrightarrow L_2]{}\left\{\begin{aligned}2x-\lambda y+z&=0\\-\lambda x+2y+z&=0\\-2x+2y-(1+\lambda)z&=0\end{aligned}\right.\xrightarrow[\substack{L_2\longleftarrow 2L_2+\lambda L_1\\L_3\longleftarrow L_3+L_1}]{}$$

$$\left\{\begin{aligned}2x-\lambda y+z&=0\\(4-\lambda^2)y+(2+\lambda)z&=0\\(2-\lambda)y-\lambda z&=0\end{aligned}\right.\xrightarrow[L_2\longleftrightarrow L_3]{}\left\{\begin{aligned}2x-\lambda y+z&=0\\(2-\lambda)y-\lambda z&=0\\(2-\lambda)(2+\lambda)y+(2+\lambda)z&=0\end{aligned}\right.\xrightarrow[L_3\longleftarrow L_3-(2+\lambda)L_2]{}$$

$$\left\{\begin{aligned}2x-\lambda y+z&=0\\(2-\lambda)y-\lambda z&=0\\(2+\lambda)(1+\lambda)z&=0\end{aligned}\right.$$

Le dernier système est triangulaire supérieur, **il n'est pas de Cramer si et seulement si l'un des termes diagonaux est nul** c'est-à-dire $2-\lambda=0$ ou $(2+\lambda)(1+\lambda)=0$

$$\boxed{\text{L'ensemble des valeurs propres de } u \text{ est } \operatorname{spect}(u)=\{-2,-1,2\}}$$

<u>**Détermination des sous-espaces propres** $E(\lambda,u)$</u> :

$*$ Pour $\lambda=-2$, le système **(S)** devient

$$\left\{\begin{aligned}2x+2y+z&=0\\4y+2z&=0\end{aligned}\right.\iff\left\{\begin{aligned}z&=-2y\\x&=0\end{aligned}\right.$$

$E(-2,u)=\{xe_1+ye_2+ze_3\in E_1\ /\ x=0 \text{ et } z=-2y\}=\{y(e_2-2e_3)\in E_1\ /\ y\in\mathbb{R}\}$

$$\boxed{E(-2,u)=\operatorname{vect}(e_2-2e_3)=\operatorname{vect}((0,1,-2,0,0,0))}$$

$*$ Pour $\lambda=-1$, le système **(S)** devient

$$\left\{\begin{aligned}2x+y+z&=0\\3y+z&=0\end{aligned}\right.\iff\left\{\begin{aligned}z&=-3y\\2x-2y&=0\end{aligned}\right.\iff\left\{\begin{aligned}z&=-3y\\x&=y\end{aligned}\right.$$

$E(-1,u)=\{xe_1+ye_2+ze_3\in E_1\ /\ x=y \text{ et } z=-3y\}=\{y(e_1+e_2-3e_3)\in E_1\ /\ y\in\mathbb{R}\}$

$$\boxed{E(-1,u)=\operatorname{vect}(e_1+e_2-3e_3)=\operatorname{vect}((1,1,-3,0,0,0))}$$

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

$*$ Pour $\lambda = 2$, le système **(S)** devient

$$\begin{cases} 2x - 2y + z & = 0 \\ \quad -2z & = 0 \\ \quad 12z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = y \\ z & = 0 \end{cases}$$

$E(2, u) = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E_1 \ / \ x = y \text{ et } z = 0\} = \{x(e_1 + e_2) \in E_1 \ / \ x \in \mathbb{R}\}$

$$\boxed{E(2, u) = \text{vect}(e_1 + e_2) = \text{vect}((1, 1, 0, 0, 0, 0))}$$

L'endomorphisme u est diagonalisable car u est un endomorphisme d'un espace de dimension 3 et possède 3 valeurs propres distinctes : condition suffisante de diagonalisation satisfaite. On aurait pu dire aussi que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E_1 : c'est alors une condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

On obtient une base de E_1 en prenant la famille $e'_1 = e_2 - 2e_3, e'_2 = e_1 + e_2 - 3e_3, e'_3 = e_1 + e_2$

2.

f est une application linéaire de E_1 dans E_2 qui ont tous les deux pour dimension 3 ;

f transforme la base (e_1, e_2, e_3) de E_1 en la base (e_4, e_5, e_6) de E_2 : c'est un isomorphisme de E_1 dans E_2

Si l'on veut la matrice de f dans les bases B_1 de E_1 et B_2 de E_2, il faut donner en colonne les coordonnées de $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ dans la base (e_4, e_5, e_6) . Or $f(e_1) = e_4$, donc la liste des coordonnées de $f(e_1)$ dans B_2 est $(1, 0, 0)$; de même la liste des coordonnées de $f(e_2)$ dans B_2 est $(0, 1, 0)$ et celle de $f(e_3)$ est $(0, 0, 1)$.

La matrice de f dans les bases $B_1, \ B_2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: c'est I_3

Remarque : Cette matrice est évidemment inversible et l'on retrouve ainsi que f est un isomorphisme de E_1 dans E_2.

f^{-1} a donc pour matrice dans les bases B_2, B_1 la matrice inverse de f, donc I_3 ; il s'ensuit que

la matrice de f^{-1} dans les bases B_2, B_1 est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: c'est également I_3

Remarque : Cela veut dire que $f^{-1}(e_4) = e_1, \ f^{-1}(e_5) = e_2, \ f^{-1}(e_6) = e_3$.

3–a)

Soit $x_1 \in E_1$, alors il existe $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$. De même il existe $(a_4, a_5, a_6) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_2 = a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6$.

$x_1 + x_2 = 0 \iff \displaystyle\sum_{k=1}^{6} a_ke_k = 0 \iff \forall k \in [\![1; 6]\!], \ a_k = 0$, car $(e_1, \ldots, e_6)$ est une famille libre, donc $x_1 = x_2 = 0$.

3–b)

Si (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont deux éléments de $E_1 \times E_2$ tels que $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, alors on a $x_1 - y_1 + x_2 - y_2 = 0$. Posons $z_1 = x_1 - y_1$, alors $z_1 \in E_1$ car E_1 est un sous-espace vectoriel de E (dès qu'il contient deux vecteurs, il contient leur différence) ; de même $z_2 = x_2 - y_2 \in E_2$. d'après **a)** , il vient $z_1 = z_2 = 0$, soit $\boxed{x_1 = y_1 \text{ et } x_2 = y_2}$

Remarque : Ce résultat était prévisible, car E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E ; tout vecteur de E se décompose alors de manière unique en la somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2 ; c'est la cas $x_1 + x_2$ qui est un vecteur de E.

4–a)

Soit $x = x_1 + x_2$; $u(x_1)$ est un vecteur de E_1 puisque $u \in \mathcal{L}(E_1)$, donc de E ; $f(x_1)$ est un vecteur de E_2 puisque $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, donc de E et $f^{-1}(x_2)$ est aussi un vecteur de E_1 puisque $f^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$: donc la somme $u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2)$ appartient à E.

F est une application de E dans E

.

D'après la remarque précédente, tout vecteur x de E se décompose de manière unique en la somme $x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. De même pour $y \in E$ $\exists!(y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $y = y_1 + y_2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $x + \lambda y = (x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2)$ où $x_1 + \lambda y_1 \in E_1$ et $x_2 + \lambda y_2 \in E_2$; donc par définition de F.

$$\begin{aligned} F(x+\lambda y) &= u(x_1+\lambda y_1) + f(x_1+\lambda y_1) + f^{-1}(x_2+\lambda y_2) \\ &= u(x_1) + \lambda u(y_1) + f(x_1) + \lambda f(y_1) + f^{-1}(x_2) + \lambda f^{-1}(y_2) \\ &\quad \text{par linéarité de } u, f, f^{-1} \\ F(x+\lambda y) &= u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2) + \lambda(u(y_1) + f(y_1) + f^{-1}(y_2)) \\ &= F(x) + \lambda F(y) \end{aligned}$$

$$\boxed{F \text{ est donc une application linéaire de } E \text{ dans } E : F \in \mathcal{L}(E)}$$

Remarque : Il y avait une démonstration pour les lecteurs qui connaissent les projecteurs (ou les projections).

Soit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. N'oublions pas que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E. L'application $x \mapsto x_1$ est la projection de E sur E_1 de direction E_2 que nous noterons p_1 : c'est un endomorphisme de E ; l'application $x \mapsto x_2$ est la projection de E sur E_2 de direction E_1 que nous noterons p_2 : c'est un endomorphisme de E . On a donc $x_1 = p_1(x)$ et $x_2 = p_2(x)$, donc

$$\begin{aligned} F(x) &= u(p_1(x)) + f(p_1(x)) + f^{-1}(p_2(x)) \\ &= (u \circ p_1)(x) + (f \circ p_1)(x) + f^{-1}(p_2(x))) \\ &= (u \circ p_1 + f \circ p_1 + f^{-1} \circ p_2)(x) \end{aligned}$$

$F = u \circ p_1 + f \circ p_1 + f^{-1} \circ p_2$;

c'est une somme d'endomorphismes de E, c'est donc un endomorphisme de E.

4–b)

Soit $x \in \operatorname{Ker} F$, $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

$$F(x) = u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2) = \underbrace{u(x_1) + f^{-1}(x_2)}_{\in\ E_1} + \underbrace{f(x_1)}_{\in\ E_2}$$

$F(x) = 0 \iff (u(x_1) + f^{-1}(x_2)) + f(x_1) = 0$ donc d'après la question **3. a)**

$$u(x_1) + f^{-1}(x_2) = f(x_1) = 0.$$

Comme f est un isomorphisme de E_1 dans E_2 , $f(x_1) = 0 \iff x_1 = 0$. L'égalité $u(x_1) + f^{-1}(x_2) = 0$ devient alors $f^{-1}(x_2) = 0$ et comme f^{-1} est un isomorphisme de E_2 dans E_1, on a $x_2 = 0$: finalement $x_1 + x_2 = x = 0$

L'égalité $F(x) = 0 \iff x = 0$, donc $\operatorname{Ker} F = \{0\}$: F est un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie (ici 6) : F est un automorphisme de E