ECRICOME
VISER PLUS HAUT

EXERCICE 1.

Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que l'intégrale I_a converge et donner sa valeur.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier que l'intégrale $f(x)$ converge.

   Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'intégrale $g(x)$ converge.

2. Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 2\sqrt{xe^t} \leqslant x + e^t$ puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Etablir que : $0 < f(x) - f(y) \leqslant \frac{y-x}{2}$.

4. Montrer que f réalise une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0,1]$.

5. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On note α cette solution. Justifier que $\alpha \in]0,1]$.

6. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\alpha - u_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n \geqslant 0}$.

   (b) On suppose qu'une fonction ECRICOME est déjà écrite en Turbo-Pascal qui à un réel x donné renvoie le réel $f(x)$.

   A l'aide de la fonction ECRICOME, écrire une fonction (ou procédure) SUITE en Turbo-Pascal qui, à un réel $\varepsilon > 0$ fourni par l'utilisateur, calcule le premier entier N tel que $\frac{1}{2^N} \leqslant \varepsilon$ et renvoie la valeur de u_N correspondante.

7. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que :

$$|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leqslant \frac{h^2}{3}.$$

   Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = -g(x).$$

8. On considère la fonction T définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = xf(x)$.
Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{puis que : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = \ln(1+x).$$

EXERCICE 2.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :
- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;
- I_n la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice $W \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $W^q = 0_n$.

On admettra que si U, V sont deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent alors :
- U^k et V^q commutent pour tous entiers k et q;
- U^{-1} commute avec V lorsque U est inversible.

1. Deux résultats préliminaires.
   (a) Soit $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $U^q = 0_n$.

   Prouver que $I_n - U$ est inversible et que $(I_n - U)^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} U^k$.

   (b) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - I_n) = 0_n$. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A.

   Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $x - f(x) \in \ker(f)$ et $f(x) \in \ker(f - \mathrm{Id})$ puis établir que $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \ker(f - \mathrm{Id})$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Etude d'une suite de matrices. Soient $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$(B(B - I_n))^N = 0_n.$$

   On introduit la suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$B_0 = B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad B_{k+1} = (B_k)^2 (2B_k - I_n)^{-1}.$$

   On considère pour tout entier $k \geqslant 0$ la proposition

$(\mathcal{H}_k)$: « $2B_k - I_n$ est inversible, il existe $C_k, D_k \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $B_k - B = [B(B - I_n)] C_k$, et $B_k(B_k - I_n) = [B(B - I_n)]^{2^k} D_k$ avec $B_k B = B B_k$, $C_k B = B C_k$ et $D_k B = B D_k$ »

Tournez la page s.v.p.

(a) Justifier que $I_n - (2B - I_n)^2$ est nilpotente et que $2B - I_n$ est inversible. En déduire que la propriété $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.

(b) On suppose la propriété $(\mathcal{H}_k)$ vraie pour un entier $k \geqslant 0$. Montrer que :

$$\begin{aligned} 2B_{k+1} - I_n &= [I_n + 2B_k (B_k - I_n)] \times [2B_k - I_n]^{-1} \\ B_{k+1} - B &= \left[(B_k - B)^2 - \left(B^2 - B\right)\right] \times [2B_k - I_n]^{-1} \\ B_{k+1}(B_{k+1} - I) &= \left[B_k (B_k - I_n)(2B_k - I)^{-1}\right]^2 \end{aligned}$$

En déduire que la propriété $(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie.

(c) Prouver l'existence d'un entier p tel que : $B_p (B_p - I_n) = 0_n$.

Etablir que la matrice B_p est diagonalisable, que la matrice $B - B_p$ est nilpotente et que : $\forall k \geqslant p, \quad B_{k+1} = B_k$.

PROBLEME.

L'objectif du problème est d'étudier une suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième utilise certains résultats obtenus dans les deux premières parties. La partie **I** est consacrée à l'étude de deux endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[X]$. La partie **II** consiste à calculer l'espérance et la variance de Z_k ainsi qu'à calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$ sous réserve de convergence. La partie **III** fournira la loi de Z_k ainsi que l'étude de la convergence de la série $\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = r)$.

Partie I : Etude de deux endomorphismes.

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. Pour tout entier $k \in \{0, 1, \ldots n\}$, on désigne par e_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$e_k = X^k$$

Rappelons que $(e_0, e_1, .., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit les fonctions $f(P)$ et $g(P)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}, \quad f(P)(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t)dt \text{ et } f(P)(1) = P(1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(P)(x) = [(X-1)P]'(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

1. Prouver que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Calculer $f(g(P))$ puis justifier que $\ker(g) = \{0\}$.
3. Démontrer que g est un isomorphisme, que $g^{-1} = f$ et que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Ecrire la matrice A de f dans la base $(e_0, e_1, .., e_n)$ ainsi que la matrice B de g dans cette même base.
5. Montrer que f et g sont diagonalisables.

Partie II : Etude d'une suite de variables aléatoires.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de $n+1$ urnes notées $U_0, U_1, ..., U_n$ et on suppose que $\forall i \in \{0, .., n\}$, l'urne U_i contient $i+1$ boules numérotées $0, 1, .., i$. On s'intéresse au jeu suivant :

- au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne U_n. Si la boule porte le numéro r alors on repose la boule dans l'urne U_n puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne U_r.
- Plus généralement, pour tout entier k non nul, si la boule numéro s a été piochée au k-ième tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne puis on effectue le $(k+1)$-ième tirage dans l'urne U_s.

Pour tout entier naturel k, on note :

- Z_k est la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au k-ième tirage. $\boxed{\textbf{On convient que } Z_0 = n.}$
- F_k est le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, x^r$.
- $E(Z_k)$ l'espérance de la variable Z_k.

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \{0, 1, ..., n\}, \quad P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1}.$$
2. Etablir les deux formules suivantes valables pour tous entiers $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, .., n-1\}$
$$\begin{cases} (\mathcal{R}_1) : (n+1)\, P(Z_{k+1} = n) = P(Z_k = n) \\ (\mathcal{R}_2) : (r+1)\, P(Z_{k+1} = r) - (r+1)\, P(Z_{k+1} = r+1) = P(Z_k = r) \end{cases}$$
3. On admet dans cette question que la série $\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = r)$ converge pour tout $r \in \{1, .., n\}$ et on pose $S_r = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$.

Tournez la page s.v.p.

En sommant les relations $(\mathcal{R}_1)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_n.

En sommant les relations $(\mathcal{R}_2)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_{n-1} et montrer que la suite $(rS_r)_{1\leqslant r\leqslant n-1}$ est constante.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer la relation

$$(\mathcal{S}) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)\,F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Etablir que $F'_k(1) = E(Z_k)$ et $F''_k(1) = E(Z_k(Z_k-1))$.

   (b) En dérivant une fois puis deux fois la relation $(\mathcal{S})$, donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F'_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F''_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$.

   (c) Donner la valeur de $F'_k(1)$ et de $F''_k(1)$ en fonction de k et n. Expliciter alors la variance $V(Z_k)$ de Z_k en fonction de k et n.

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

On reprend toutes les notations des parties **I** et **II** et on pourra admettre tous les résultats établis dans ces deux parties. Rappelons également qu'à la question **II.4** la relation $(\mathcal{S})$ est démontrée ce qui revient à écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(F_{k+1}) = F_k.$$

Pour finir, pour tout entier $k \in \{0, 1, .., n\}$ on désigne par u_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$u_k = (X-1)^k.$$

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, e_r = F_k = f^k(e_n)$.

2. Prouver que $(u_0, u_1, .., u_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Calculer $f(u_r)$ pour $r \in \{0, 1, .., n\}$. Retrouver ainsi que f est diagonalisable.

4. Justifier que : $e_n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u_r$ et que : $\forall r \in \{0.1.\dots n\}$. $\quad u_r = \displaystyle\sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j}\binom{r}{j} e_j$.

5. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(e_n) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} u_r$.

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

6. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, .., n\}$. A l'aide des questions précédentes, établir que :

$$P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

7. Application.

(a) Soit $j \in \{0, 1, .., n\}$. Déterminer un réel $M_{j,n}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |P(Z_k = j)| \leqslant \frac{M_{n,j}}{(j+1)^k}$$

puis justifier que la série $\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = j)$ converge lorsque $j \in \{1, .., n\}$.

(b) Déterminer un réel C_n tel que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad |P(Z_k = 0) - 1| \leqslant \frac{C_n}{2^k}$.

La série $\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = 0)$ est-elle convergente ?

■

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2012

ECRICOME VOIE S 2012

CORRIGE

EXERCICE I

1)

• La fonction φ_a définie par : $\varphi_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ ae^{-at} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$ est une densité de probabilité d'une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre a. On sait alors que l'intégrale $\int_0^{+\infty} ae^{-at}dt$ converge et vaut 1. Il en résulte que

$$\boxed{\text{l'intégrale } I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}dt \text{ converge et } I_a = \frac{1}{a}.}$$

• La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{x+e^t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ puisque $x \geq 0 \Longrightarrow x + e^t > 0$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{x+e^t}$ n'est impropre qu'en $+\infty$.

Or $\dfrac{1}{x+e^t} \underset{(+\infty)}{\sim} e^{-t}$. On vient de voir que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ converge puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge (prendre $a = 1$). Par la règle d'équivalence des fonctions continues positives, on déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{x+e^t}$ converge, d'où

$$\boxed{\forall x \geq 0, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} \text{ converge : la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+}$$

Remarque : pour la fonction g, il suffisait de dire que $\dfrac{1}{(x+e^t)^2} \underset{(+\infty)}{\sim} e^{-2t}$ et d'utiliser le résultat précédent pour $a = 2$.

2)

$$\begin{aligned} 2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t \quad & \Longleftrightarrow x + e^t - 2\sqrt{x}\sqrt{e^t} \geq 0 \\ & \Longleftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{e^t})^2 \geq 0 \end{aligned} \quad \text{, ce qui est toujours vrai.}$$

$$\forall x \geq 0, \ 2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$$

$$\forall x > 0, \ \forall t \geq 0, \quad 0 < \sqrt{x}\sqrt{e^t} \leq x + e^t \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{1}{x+e^t} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}e^{\frac{t}{2}}} \quad \text{car } \sqrt{e^t} = (e^t)^{\frac{1}{2}}$$

D'après la question 1), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}e^{\frac{t}{2}}}dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}dt$ converge et vaut

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\dfrac{1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. On peut donc intégrer l'inégalité précédente entre 0 et $+\infty$; on obtient

$0 \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2\sqrt{x}\times e^{\frac{t}{2}}}$, c'est-à-dire $\boxed{\forall x > 0,\ 0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}}$

3)

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ f(x) - f(y) &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{y+e^t} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)} dt \qquad \textbf{(3)}\end{aligned}$$

Or $0 < e^t < x + e^t$ et $0 < e^t < y + e^t$ implique $0 < \dfrac{1}{(x+e^t)(y+e^t)} \leq \dfrac{1}{(e^t)^2} = e^{-2t}$, puis $0 < \dfrac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)} < (y-x)e^{-2t}$ puisque $x < y$.

Il n'y a pas de problème d'intégration entre 0 et $+\infty$ d'après la question 1), les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant, donc

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2\ /\ x < y,\ 0 \leq f(x) - f(y) \leq (y-x)\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt$, et d'après la question 1),

$$\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x < y \Longrightarrow f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}}$$

4)

Il en résulte immédiatement que $0 < x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$ d'après **(3)** car $t \mapsto \dfrac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)}$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement décroissante sur }]0,+\infty[}$$

On a le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0

Explications : $f(0) = I_1 = 1$ d'après la question 1) ; $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par encadrement.

L'encadrement $0 < f(x) - f(y) \leq \dfrac{y-x}{2}$ pour $x < y$ implique $\displaystyle\lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} f(y) = f(x)$. Par la symétrie des rôles joués par x et y, on a $\displaystyle\lim_{\substack{y\to x\\ y<x}} f(y) = f(x)$. La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$ (il est clair qu'en $x = 0$ il n'y a que la continuité à droite). Donc

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection continue, strictement décroissante de } [0,+\infty[\text{ sur son image }]0,1]}$$

5)

Posons $\varphi(x) = f(x) - x$ pour $x \geq 0$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$; elle est strictement décroissante pour les mêmes raisons ($x \mapsto -x$ est strictement décroissante).

$\varphi(0) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$, donc la fonction φ réalise une bijection continue, strictement décroissante de $[0,+\infty[$ sur son image $]-\infty,1]$. Comme 0 appartient à $]-\infty,1]$, il existe une unique réel $\alpha \in [0,+\infty[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

$\exists!\ \alpha \in \mathbb{R}_+\ /\ f(\alpha) = \alpha$. Or $f(\alpha) \in f(\mathbb{R}_+) =]0,1]$, donc $\alpha \in]0,1]$.