BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2010

Concepteur : ESSEC

281

ESSECMATS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

Mardi 11 mai de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations et objectif du problème

On désigne par I l'intervalle $[1,+\infty[$; on note E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles et $C^1(I,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur I à valeurs réelles.

On fixe enfin a un réel strictement positif.

Pour f un élément de E, on dit qu'une fonction y de $C^1(I,\mathbb{R})$ est une solution du problème (E_f) si :

$\forall\, x \in I, \quad y'(x) - ay(x) + f(x) = 0,$

L'objectif de ce problème est de montrer qu'à tout élément f de E, on peut associer une unique solution g de (E_f) qui soit bornée sur I, puis d'étudier l'opérateur $U : f \mapsto g$.

Les trois parties du problèmes traitent, souvent à partir d'exemples, de propriétés de l'opérateur U.

I. Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U

1. *Etude de l'équation* (E_f)

a) On considère $f \in E$ et $y \in C^1(I,\mathbb{R})$. Ecrire la dérivée de $x \mapsto e^{-ax}y(x)$. Montrer alors que y est solution du problème (E_f) si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x \in I$, $y(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t)dt\right)$.

b) Montrer que, s'il existe une solution de (E_f) qui soit bornée sur I, celle-ci est unique.

c) Vérifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)dt$ est convergente.

d) Démontrer que $g : x \mapsto e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)dt$ est l'unique solution de (E_f) qui soit bornée sur I.

Dans toute la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction g obtenue à la question d).

2. *Linéarité de U*

a) Expliciter $U(f)$ dans le cas où $f = 1$.

b) Montrer que U est un endomorphisme de E.

c) U est-il injectif ?

d) On définit les puissances successives de U par $U^0 = Id_E$ et pour tout entier naturel n non nul, $U^n = U^{n-1} \circ U$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U^{n+1}(f)$ est la fonction : $x \mapsto \mathrm{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} \mathrm{e}^{-at} f(t)dt$.

3. *Cas des fonctions exponentielles*

a) Pour k un nombre réel positif et f_k la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-kx}$, expliciter $U(f_k)$.

b) En déduire que, pour tout réel $\lambda \in \left]0, \frac{1}{a}\right]$, $\mathrm{Ker}(U - \lambda id_E) \neq \{0\}$.

c) Pour tout entier naturel n, expliciter $U^n(f_k)$. Pour x élément de I, préciser $\lim_{n \to \infty} \left[U^n(f_k)\right](x)$.

4. *Cas des fonctions sinus et cosinus*

Dans cet exemple <u>seulement (ensemble de la question I-4)</u>, on prendra $a = 1$.

a) Expliciter $U(\sin)$ et $U(\cos)$.

b) Montrer que le sous-espace P de E engendré par les fonctions *sin* et *cos* est stable par U et que (*sin*, *cos*) en est une base. Dans cette base, écrire la matrice M de l'endomorphisme $U_P : \begin{cases} P \to P \\ f \mapsto U(f) \end{cases}$.

c) Calculer M^2, M^3, M^4. Expliciter M^n pour tout entier naturel n, puis préciser la limite des coefficients de M^n lorsque n tend vers l'infini.

5. *Une autre famille de fonctions*

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction de E $\varphi_n : x \mapsto e^{-x} x^n$ et on note ψ_n la fonction $U(\varphi_n)$.

a) Pour n entier naturel non nul, établir une relation entre ψ_n, φ_n et ψ_{n-1}.

b) Pour p entier naturel, montrer que le sous espace F_p de E engendré par $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est stable par U et admet pour base $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p)$.

c) On prend ici $p = 2$, écrire dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ de F_2 la matrice T_2 de l'endomorphisme $U_2 : \begin{cases} F_2 \to F_2 \\ f \mapsto U(f) \end{cases}$. Calculer T_2^n pour tout entier naturel n, puis préciser la limite des coefficients de T_2^n lorsque n tend vers l'infini.

6. *Une autre expression de $U(f)$*

Pour $f \in E$, montrer que : $\forall x \in I$, $U(f)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(x+t)dt$.

7. *Positivité de U*

a) Pour $f \in E$, montrer que : $|U(f)| \leq U(|f|)$.

On considère maintenant φ un élément de E à valeurs positives et $\psi = U(\varphi)$.

b) Montrer que ψ est à valeurs positives.

c) On suppose que φ est décroissante. Montrer que $a\psi \leq \varphi$ puis que ψ est décroissante.

8. *Commutation de U avec la dérivation*

On note $E_1 = \left\{ f \in E \cap C^1(I,\mathbb{R}) / f' \text{ bornée sur } I \right\}$ et D l'opérateur de dérivation qui, à tout élément de E_1, associe sa dérivée.

a) Pour f un élément de E_1, montrer, en utilisant la question 6, que : $aU(f) = f + U(f')$.

b) En déduire que, pour tout élément f de E_1, $D(U(f)) = U(D(f))$.

c) Pour f une fonction de E_1 à valeurs positives et décroissante, retrouver le résultat de la question **7.c)** : $U(f)$ est décroissante.

II. Comportement asymptotique de $U(f)$ au voisinage de $+\infty$

On traite ici quelques cas fondamentaux, en partant d'exemples de fonctions f pour lesquelles on peut connaître le comportement de $g = U(f)$ au voisinage de $+\infty$.

1. *Résultats préliminaires*

On considère ici α et β deux fonctions à valeurs réelles, continues sur I. On suppose que, $\forall\, x \in I$, $\beta(x) > 0$, et que $\int_1^{+\infty} \beta(t)\,dt$ converge.

a) On suppose ici que $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\beta(x))$ et on se propose de montrer que $\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$, montrer que : $\exists\, A > 0 \,/\, \forall\, x \geq A$, $\left|\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt\right| \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt$. Conclure.

b) On suppose maintenant que $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \beta(x)$, montrer que $\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt$.

2. *Cas des fonctions admettant une limite en $+\infty$*

Si f est un élément de E admettant une limite finie b en $+\infty$ (b est un nombre réel), montrer que $g = U(f)$ admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera (*on pourra commencer par traiter le cas où b = 0 en écrivant, dans ce cas,* $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1)$ *et en utilisant la question* **1.**).

3. *Cas des fonctions puissances*

Dans cette question et la suivante, ω est un réel strictement positif, on note f_ω la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\omega}$ et $g_\omega = U(f_\omega)$.

a) Montrer que $g_\omega(x) = \dfrac{f_\omega(x)}{a} - \dfrac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x)$. En déduire que $g_\omega(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{f_\omega(x)}{a}$.

b) Montrer que pour tout x de I : $\int_1^x \dfrac{e^{-at}}{t}\,dt = \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{a^k}{k.k!}\left(x^k - 1\right)$ (On pourra utiliser une inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction $t \mapsto e^{-at}$), et en déduire :

$$g_1(x)=e^{ax}\left\{-\ln x-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{a^k}{k.k!}\left(x^k-1\right)+\int_1^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t}dt\right\}.$$

4. *Cas des fonctions comparables aux fonctions puissances f_ω*

On note toujours f un élément de E et $g=U(f)$.

a) Prouver que si f est négligeable devant f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est négligeable devant g_ω au voisinage de $+\infty$.

b) Prouver que si f est équivalent à f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est équivalent à $\frac{f}{a}$ au voisinage de $+\infty$.

III Convergence absolue de $\int_1^{+\infty} U(f)$

On s'intéresse dans cette partie à la convergence de $\int_1^{+\infty}\left|\left[U(f)\right](t)\right|dt$ dans le cas où $\int_1^{+\infty}|f(t)|dt$ est elle-même convergente. On note toujours $g=U(f)$.

1. *Etudes d'exemples*

a) Pour k un réel strictement positif et $f_k : t\mapsto \mathrm{e}^{-kt}$, on note $g_k=U(f_k)$. Vérifier que $\int_1^{+\infty} g_k(t)dt$ est convergente.

b) Pour ω un réel strictement positif, on note encore $f_\omega : t\mapsto \frac{1}{t^\omega}$ et $g_\omega=U(f_\omega)$. Pour quelles valeurs de ω, $\int_1^{+\infty} g_\omega(t)dt$ est-elle convergente ?

2. *Cas des fonctions positives*

Dans cette question, f est un élément de E, à valeurs positives tel que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

On note $F : x\in I\mapsto \int_1^x f(t)dt$, $g=U(f)$ et $G : x\in I\mapsto \int_1^x g(t)dt$.

a) Vérifier que $G'-aG=-F+g(1)$.

b) Justifier que F est dans E et montrer qu'il existe une constante réelle K telle que, pour tout $x\in I$, $G(x)=K\,\mathrm{e}^{ax}+\left[U(F)\right](x)-\frac{g(1)}{a}$.

c) Vérifier que la fonction $x\mapsto\frac{G(x)}{x}$ est bornée sur I.

d) En déduire que $K=0$ et que $G=U(F)-\frac{g(1)}{a}$.

e) Montrer alors que $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est convergente.

3. *Cas général*

Dans cette question, f est un élément de E tel que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente.

Montrer que $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est absolument convergente.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2010

ESSEC OPTION SCIENTIFIQUE

CORRIGE

Partie I : Existence et propriétés de l'opérateur U

Etude de l'équation E_f

1–a)

Notons h l'application $x \in I \mapsto \exp(-ax)y(x)$ où $y \in C^1(I,\mathbb{R})$. L'application h est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I et

$\forall x \in I,\ h'(x) = -a\exp(-ax)y(x) + \exp(-ax)y'(x) = \exp(-ax)\Big(-ay(x) + y'(x)\Big)$

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } E_f &\iff -ay(x) + y'(x) = -f(x) \\ &\iff h'(x) = -\exp(-ax)f(x) \quad \text{car } \exp(-ax) \text{ n'est jamais nulle} \\ &\iff \exists\, K \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in I,\ h(x) = -\int_1^x \exp(-at)f(t)dt + K \end{aligned}$$

$$\boxed{y \text{ est solution de } E_f \iff \exists\, K \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in I,\ y(x) = \exp(ax)\Big(K - \int_1^x \exp(-at)f(t)dt\Big)}$$

1–b)

Supposons qu'il existe au problème E_f deux solutions bornées y et z.

La fonction z est solution de E_f, donc $\exists\, K_1 \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in I,\ z(x) = \exp(ax)\Big(K_1 - \int_1^x \exp(-at)f(t)dt\Big)$.

Donc $\forall x \in I,\ (y(x) - z(x)) = \exp(ax)(K - K_1)$

On sait que $a > 0$; si $K \neq K_1$, alors $\lim_{x\to+\infty} \exp(ax)(K-K_1) = \pm\infty$ avec le signe de $K - K_1$.

Par hypothèse, y et z sont bornées sur I, donc $\exists\,(M, M_1) \in (\mathbb{R}_+)^2\ /\ \forall x \in I,\ |y(x)| \leq M$ et $|z(x)| \leq M_1$.

D'après l'inégalité triangulaire, $|y(x) - z(x)| \leq |y(x)| + |z(x)| \leq M + M_1$.

$|y - z|$ est bornée donc $y - z$ ne peut tendre vers l'infini. Conclusion $K = K_1$, donc $y = z$.

$$\boxed{\text{Il existe au plus une solution bornée au problème } E_f}$$

1–c)

- La fonction f appartient à E, elle est donc bornée sur I. Il existe $A \in \mathbb{R}_+\ /\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leq A$. Donc $\forall x \in I,\ |\exp(-ax)f(x)| = \exp(-ax)|f(x)| \leq A\exp(-ax)$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} A\exp(-ax)dx$ est convergente car $a > 0$; par comparaison des fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} |\exp(-ax)f(x)|dx$ est convergente,

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} \exp(-ax)f(x)dx \text{ est absolument convergente donc convergente}}$$

1–d)

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \exp(-at)f(t)dt$ converge équivaut à $\forall x \in I$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \exp(-at)f(t)dt$ converge.

La fonction g est définie sur I.

Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}
\forall x \in I,\ |g(x)| &\leq \exp(ax)\Big|\int_x^{+\infty} \exp(-at)f(t)dt\Big| \\
&\leq \exp(ax)\int_x^{+\infty} |\exp(-at)f(t)|dt \quad \text{(les bornes sont dans l'ordre croissant)} \\
&\leq \exp(ax)\int_x^{+\infty} A\exp(-at)dt \quad \text{(les bornes sont dans l'ordre croissant)} \\
&\leq A\exp(ax)\int_x^{+\infty} \exp(-at)dt
\end{aligned}$$

Or $\int_x^{+\infty} \exp(-at)dt = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_x^{b} \exp(-at)dt = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{a}\Big(-\exp(-ab)+\exp(-ax)\Big) = \frac{\exp(-ax)}{a}$

$$\forall x \in I,\ |g(x)| \leq \frac{A}{a}\ \textbf{: } g \textbf{ est bornée sur } I$$

- Montrons que $g \in C^1(I,\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in I,\ \int_x^{+\infty} \exp(-at)f(t)dt &= \int_1^{+\infty} \exp(-at)f(t)dt - \int_1^{x} \exp(-at)f(t)dt \\
&= B - \int_1^{x} \exp(-at)f(t)dt \quad \text{avec } B = \int_1^{+\infty} \exp(-at)f(t)dt \text{ donc} \\
\forall x \in I,\ g(x) &= \exp(ax)\Big(B - \int_1^{x} \exp(-at)f(t)dt
\end{aligned}$$

La fonction f est continue sur I, donc la fonction $x \mapsto \int_1^{x} \exp(-at)f(t)dt$ est la primitive de $t \mapsto \exp(-at)f(t)$ qui s'annule au point 1 ; c'est donc une fonction de classe C^1 sur I. Comme l'exponentielle est aussi de classe C^1 sur I, il est immédiat que $x \mapsto \exp(ax)\Big(B - \int_1^{x} \exp(-at)f(t)dt\Big)$ est de classe C^1 sur I

La fonction g appartient à $C^1(I,\mathbb{R})$

- Montrons que g est solution du problème E_f.

$$\begin{aligned}
\forall x \in I,\ g'(x) &= a\exp(ax)\Big(B - \int_1^{x} \exp(-at)f(t)dt\Big) - \exp(ax)\exp(-ax)f(x) \\
&= a\exp(ax)\int_x^{+\infty} \exp(-at)f(t)dt - f(x) \quad \text{par définition de } B \\
&= ag(x) - f(x)
\end{aligned}$$

$$\forall x \in I,\ g'(x) - ag(x) + f(x) = 0 : g \textbf{ est solution du problème } E_f$$

$$\boxed{\text{Finalement, } g \text{ est bornée sur } I \text{, solution de } E_f : g \text{ est l'unique solution bornée de } E_f}$$

Linéarité de U

2–a)

Pour $f = 1,\ g(x) = \exp(ax)\int_x^{+\infty} \exp(-at)dt = \exp(ax)\frac{\exp(-ax)}{a}$ (calcul fait au 1–d))

$$\boxed{U(1) = \frac{1}{a}}$$

2–b)

Par linéarité des intégrales convergentes, $\forall (f, f_1) \in E_1,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I$,

$$\begin{aligned}(U(f+\lambda f_1))(x) &= \exp(ax)\int_x^{+\infty}\exp(-at)\Big(f(t)+\lambda f_1(t)\Big)dt\\ &= \exp(ax)\int_x^{+\infty}\exp(-at)f(t)dt + \lambda\exp(ax)\int_x^{+\infty}\exp(-at)f_1(t)dt\\ &= (U(f))(x) + \lambda(U(f_1))(x) = (U(f)+\lambda U(f_1))(x)\end{aligned}$$

Donc $U(f+\lambda f_1) = U(f) + \lambda U(f_1)$: U est linéaire.

D'autre part on a montré que $g = U(f)$ était C^1 sur I, donc continue et on a montré aussi que si f appartient à E, alors g appartient aussi à E ; donc $U(f) \in E$.

$$\boxed{\text{L'application } U\ :\ f \in E \mapsto U(f) \text{ est un endomorphisme de } E}$$

2–c)

Soit $f \in E$;

$$\begin{aligned}U(f) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \forall x \in I,\ \exp(ax)\int_x^{+\infty}\exp(-at)f(t)dt = 0\\ &\Longleftrightarrow \forall x \in I,\ \int_x^{+\infty}\exp(-at)f(t)dt = 0\end{aligned}$$

Notons $G(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\exp(-at)f(t)dt$. $\qquad \forall x \in I,\ G(x) = 0 \Longrightarrow \forall x \in I,\ G'(x) = 0$

$G(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty}\exp(-at)f(t)dt - \int_1^x \exp(-at)f(t)dt$, donc $G'(x) = -\exp(-ax)f(x)$

$\forall x \in I,\ G'(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in I,\ f(x) = 0$ car l'exponentielle n'est jamais nulle.

$$\boxed{\forall f \in E,\ U(f) = 0 \Longrightarrow f = 0 : U \text{ est injectif}}$$

2–d)

Montrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall f \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \Big(U^{n+1}(f)\Big)(x) = \exp(ax)\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}\exp(-at)f(t)dt$$

$*$ Pour $n = 0$

$$(U^1(f))(x) = (U(f))(x) = \exp(ax)\int_x^{+\infty}\exp(-at)f(t)dt = \exp(ax)\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^0}{0!}\exp(-at)f(t)dt$$

La propriété est initialisée au rang $n = 0$.

$*$ Supposons la propriété vraie pour un entier n donné.

$$\forall x \in I,\ (U^{n+2}(f))(x) = (U^{n+1}(U(f)))(x) = \exp(ax)\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}\exp(-at)(U(f))(t)dt \qquad \textbf{(1)}$$

car $U(f)$ appartient à E et on peut donc lui appliquer la formule au rang n.

Posons $I_n(B) = \displaystyle\int_x^B \frac{(t-x)^n}{n!}\exp(-at)(U(f))(t)dt$ pour $B \geq x$ et intégrons par parties.

$$\beta'(t) = \frac{(t-x)^n}{n!} \Longleftarrow \beta(t) = \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\ ;$$

$$\alpha(t) = \exp(-at)(U(f))(t) \Longrightarrow \alpha'(t) = \exp(-at)\Big((U(f))'(t) - a(U(f))(t)\Big)\ ;$$

Or $(U(f))(t) = g(t)$, donc $(U(f))'(t) - a(U(f))(t) = g'(t) - ag(t) = -f(t)$ car g est solution de E_f.

Les fonctions α et β sont de classe C^1 sur I, l'intégration par parties est justifiée.

$$\begin{aligned} I_n(B) &= \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\exp(-at)U((f))(t)\right]_x^B + \int_x^B \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\exp(-at)f(t)dt \\ &= \frac{(B-x)^{n+1}}{(n+1)!}\exp(-aB)\underbrace{(U(f)(B)}_{g(B)} + \int_x^B \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\exp(-at)f(t)dt \qquad \mathbf{(2)} \end{aligned}$$

$0 \leq \left|\frac{(B-x)^{n+1}}{(n+1)!}\exp(-aB)g(B)\right| \leq \frac{(B-x)^{n+1}}{(n+1)!}\exp(-aB)\max_{x\in\ I}|g(t)|$ (n'oublions pas que g est bornée sur I).

Par croissances comparées $\lim_{B\to+\infty}\frac{(B-x)^{n+1}}{(n+1)!}\exp(-aB) = 0$ car $a > 0$,

donc $\lim_{B\to+\infty}\frac{(B-x)^{n+1}}{(n+1)!}\exp(-aB)\max_{x\in\ I}|g(t)| = 0$ et par encadrement

$\lim_{B\to+\infty}\left|\frac{(B-x)^{n+1}}{(n+1)!}\exp(-aB)g(B)\right| = 0$

L'égalité **(2)** donne $\lim_{B\to+\infty} I_n(B) = \int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\exp(-at)f(t)dt$

En tenant compte du fait que $\lim_{B\to+\infty} I_n(B) = \int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}\exp(-at)(U(f))(t)dt$ et en revenant à l'égalité **(1)** on a : $(U^{n+2}(f))(x) = \exp(ax)\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\exp(-at)f(t)dt$

La propriété est héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence,

$$\boxed{\forall f \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \left(U^{n+1}(f)\right)(x) = \exp(ax)\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}\exp(-at)f(t)dt}$$

Remarque : on aurait peut-être pu s'assurer que l'intégrale $\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}\exp(-at)(U(f))(t)dt$ convergeait en disant que

$\left|\frac{(t-x)^n}{n!}\exp(-at)(U(f))(t)\right| \leq \frac{(t-x)^n}{n!}\exp(-at)\max_{t\in\ I}|g(t)| \leq \frac{(t-x)^n}{n!}\exp(-at)A$ où $A = \max_{t\in\ I}|g(t)|$

Puis par croissances comparées, $\frac{(t-x)^n}{n!}\exp(-at) = 0(\frac{1}{t^2})$, ce qui assure la convergence de l'intégrale.

Cas des fonctions exponentielles

3–a)

$$\begin{aligned} \forall x \in I,\ (U(f_k))(x) &= \exp(ax)\int_x^{+\infty}\exp(-at)\exp(-kt)dt \\ &= \exp(ax)\int_x^{+\infty}\exp(-(k+a)t)dt \\ &= \exp(ax)\frac{\exp(-(a+k)x)}{a+k} \qquad \text{(calcul déjà fait en 1–d))} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ U(f_k) = \frac{1}{a+k}f_k}$$

3–b)

Pour tout $k \in \mathbb{R}_+$, f_k appartient à $\mathrm{Ker}(U - \frac{1}{a+k}\mathrm{Id}_E)$.

Or $\forall \lambda \in]0, \frac{1}{a}]$, $\exists k \geq 0\ /\ \lambda = \frac{1}{a+k}$ car l'application $k \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{a+k}$ est une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, \frac{1}{a}]$.