BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EM LYON

Code sujet
295
EML__MATS

Première épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 29 avril 2008 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée

PROBLÈME

On confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note E l'ensemble des applications $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ et telles que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 \, \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ converge.

On note F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.

Préliminaire : Valeur de l'intégrale de Gauss

En considérant une variable aléatoire suivant une loi normale, justifier :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-m)^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Partie I : Un produit scalaire sur E

1. Établir, pour tout $(\alpha, \beta) \in [0\,;+\infty[^2$: $\alpha\beta \leqslant \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$.

2. En déduire que, pour tout $(u,v) \in E^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

On note $(.\,|\,.)$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui, à tout $(u,v) \in E^2$, associe $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

On notera la présence du facteur $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3. **a.** Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b. Montrer que l'application $(.\,|\,.)$ est un produit scalaire sur E.

4. Démontrer : $F \subset E$.

On note encore $(.\,|\,.)$ la restriction à F ou à F_n, pour $n \in \mathbb{N}$, du produit scalaire $(.\,|\,.)$ sur E. On admet que cette restriction est encore un produit scalaire sur F ou sur F_n.

On note $\|.\|$ la norme sur E associée au produit scalaire $(.\,|\,.)$, définie, pour tout $u \in E$, par :

$$\|u\| = \sqrt{(u\,|\,u)}.$$

Partie II : Polynômes d'Hermite

On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} w^{(n)}(x)$, où $w^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de w.

En particulier : $H_0(x) = 1$.

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$.
Faire figurer les calculs sur la copie.

2. **a.** Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x).$$

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n .

c. Contrôler alors les résultats obtenus en **II.1** et calculer H_4.
Faire figurer les calculs sur la copie.

3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient du terme de plus haut degré de H_n.

4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.
Qu'en déduit-on, en terme de parité, pour l'application H_n ?

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Partie III : Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

1. **a.** Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in F$:

$$(P' \mid H_{n-1}) = (P \mid H_n),$$

où $(. \mid .)$ est le produit scalaire sur F défini en **I.4.**

À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un intervalle fermé borné.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in F_{n-1}$: $(P \mid H_n) = 0$.

c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \ldots, H_n)$ est orthogonale dans F.

2. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, ..., H_n)$ est une base de F_n.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer : $\|H_n\|^2 = (H_n^{(n)} \mid H_0)$, où $\|.\|$ est définie en **I.4.**

b. En déduire la valeur de $\|H_n\|$.

Partie IV : Un endomorphisme symétrique

On note f, g, h les applications définies de F dans F, pour tout $P \in F$, par :

$$f(P) = -P'' + 2\mathrm{X}P' + P, \quad g(P) = 2\mathrm{X}P - P', \quad h(P) = P'.$$

Ainsi, par exemple, pour tout $P \in F$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $\big(g(P)\big)(x) = 2xP(x) - P'(x)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de F.

On admet que g et h sont aussi des endomorphismes de F, et on note Id_F l'application identique de F.

2. **a.** Établir : $g \circ h = f - \mathrm{Id}_F$ et $h \circ g = f + \mathrm{Id}_F$.

b. En déduire : $f \circ g - g \circ f = 2g$.

3. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in F$, si $f(P) = \lambda P$, alors $f\big(g(P)\big) = (\lambda + 2)g(P)$.

4. **a.** Calculer $f(H_0)$.

b. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g(H_k)$, et en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $f(H_k) = (2k+1)H_k$.

5. Établir, pour tout $(P, Q) \in F^2$:

$$(P' \mid Q') = \big(f(P) \mid Q\big) - (P \mid Q).$$

À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un intervalle fermé borné.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer : $\forall P \in F_n, \quad f(P) \in F_n$.

On note f_n l'endomorphisme de F_n défini par :

$$\forall P \in F_n, \quad f_n(P) = f(P).$$

b. Montrer que f_n est un endomorphisme symétrique de F_n.

c. Donner une base orthonormale de F_n constituée de vecteurs propres de f_n.

Tournez S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Partie V : Intervention d'exponentielles

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$, φ_a l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\varphi_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$.

1. Vérifier, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\varphi_a \in E$.

2. Montrer, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: $(\varphi_a \,|\, \varphi_b) = \mathrm{e}^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$.

3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} ||\varphi_{\sqrt{\ln n}}||^{-2}$.

4. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} ||\varphi_{\sqrt{n}}||^{-2}$ converge et calculer sa somme.

Partie VI : Une limite de probabilité conditionnelle

Soit la fonction Φ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et déterminer sa dérivée Φ'.

2. Soient G et K les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad G(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2} \quad \text{et} \quad K(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}\cdot$$

a. Déterminer les limites des fonctions Φ, G et K en $+\infty$.

b. Déterminer les sens de variation des fonctions $G - \Phi$ et $\Phi - K$.

c. En déduire : $\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad G(x) \leqslant \Phi(x) \leqslant K(x)$.

d. Montrer : $\Phi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}\cdot$

3. Soit X une variable aléatoire normale d'espérance égale à 0 et d'écart-type égal à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot$

a. Pour tout réel x strictement positif, exprimer la probabilité $\mathrm{P}(X \leqslant x)$ à l'aide de la fonction Φ.

b. Soit c un réel strictement positif.
Pour tout réel x, on considère la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{(X>x)}(X \leqslant x + c)$.
Montrer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{P}_{(X>x)}(X \leqslant x + c) = 1$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2008

EM-LYON 2008 VOIE S

CORRIGE

PRELIMINAIRES

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres m, σ^2. Une densité de X est φ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$ et l'on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$ par définition d'une densité.

Prenons $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$; l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$ s'écrit $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(x-m)^2)dx = 1$, soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(x-m)^2)dx = \sqrt{\pi}$$

PARTIE I : Un produit scalaire sur E

1)

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0$, donc $\boxed{\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)}$

2)

On a alors, pour tout réel x $|u(x)v(x)| = |u(x)||v(x)| \leq \frac{1}{2}(u^2(x)+v^2(x))$ d'après l'inégalité précédente et en tenant compte que $(|z|)^2 = z^2$ pour tout réel z. Multiplions les deux termes de cette inégalité par $\exp(-x^2) > 0$, on obtient

$|u(x)v(x)| \exp(-x^2) \leq \frac{1}{2}(u^2(x) + v^2(x)) \exp(-x^2) = \frac{1}{2}u^2(x) \exp(-x^2) + \frac{1}{2}v^2(x) \exp(-x^2)$.

Puisque u et v appartiennent à E, les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}u^2(x) \exp(-x^2)dx$ et

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}v^2(x) \exp(-x^2)dx$ convergent ;

par linéarité des intégrales convergentes $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(u^2(x) + v^2(x)) \exp(-x^2)dx$ converge et par le théorème de comparaison des fonctions continues positives, l'inégalité

$|u(x)v(x)| \exp(-x^2) \leq \frac{1}{2}(u^2(x) + v^2(x)) \exp(-x^2) = \frac{1}{2}u^2(x) \exp(-x^2) + \frac{1}{2}v^2(x) \exp(-x^2)$

implique :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)v(x)| \exp(-x^2)dx \text{ est convergente.}$$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x) \exp(-x^2)dx$ est absolument convergente, donc convergente

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.