BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code épreuve : 295

Concepteur : EMLYON Business School

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril 2012 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geqslant 2$.
On confond polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ ou sur $[0\,;+\infty[$ ou sur $]0\,;+\infty[$.
On note $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Partie I : Interpolation polynomiale

Soient $a_1, ..., a_n$ des réels deux à deux distincts. On note

$$\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad P \longmapsto \varphi(P) = \big(P(a_1), ..., P(a_n)\big).$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme.

2. En déduire que, pour tout $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ unique tel que :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad P(a_i) = b_i.$$

3. *Exemple :*
Déterminer le polynôme P_0 de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :

$$P_0(0) = 1, \quad P_0(1) = 3, \quad P_0(2) = 11, \quad P_0(3) = 31.$$

Partie II : Polynômes spéciaux

On considère l'ensemble E des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad \big(P(x)>0 \ \text{ et } \ P'(x)>0\big).$$

1. Donner un exemple d'élément de E.

2. Montrer que E est stable par multiplication par un réel strictement positif, par addition et par multiplication, c'est-à-dire que, pour tout $\alpha \in]0\,;+\infty[$ et tous $P, Q \in E$, on a :

$$\alpha P \in E,\quad P+Q \in E,\quad PQ \in E.$$

Est-ce que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?

3. Soit $P \in E$. On note $P_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t.$
Montrer : $P_1 \in E$.

4. Soit $P \in E$. Montrer : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad P(x) \geqslant P(0)$.

Pour tout $P \in E$, on note $\widetilde{P} : [0\,;+\infty[\longrightarrow [P(0)\,;+\infty[,\quad x \longmapsto \widetilde{P}(x) = P(x)$.

5. Montrer que l'application $\widetilde{P}$ est bijective.

6. Si, de plus, P est de degré au moins 2, est-ce que l'application réciproque $\widetilde{P}^{-1}$ de $\widetilde{P}$ est une application polynomiale ?

Partie III : Matrices symétriques positives

On note $\mathbf{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques A de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall U \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad {}^tUAU \geqslant 0.$$

Soit A une matrice symétrique de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$? Justifier.

2. **a.** Montrer que si A est dans $\mathbf{S}_n^+$, alors toutes les valeurs propres de A sont dans $[0\,;+\infty[$.

b. Réciproquement, montrer que si toutes les valeurs propres de A sont dans $[0\,;+\infty[$, alors A est dans $\mathbf{S}_n^+$.

Partie IV : Matrice symétrique positive solution d'une équation polynomiale spéciale

Soit $P \in E$ de degré $n-1$ (l'ensemble E a été défini dans la partie **II**), et soit $A \in \mathbf{S}_n^+$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, appartenant toutes à $[P(0)\,;+\infty[$.
On note D la matrice diagonale de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dont les termes diagonaux sont successivement $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et Q une matrice inversible de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$.
On se propose de résoudre l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathbf{S}_n^+$.

1. On suppose que l'équation $P(S) = A$ a une solution dans $\mathbf{S}_n^+$.
Soit S appartenant à $\mathbf{S}_n^+$ telle que $P(S) = A$. On note $\Delta = Q^{-1}SQ$.

a. Montrer que $SA = AS$ et en déduire que $\Delta D = D\Delta$.

b. Démontrer que Δ est diagonale et que les éléments diagonaux de Δ sont tous positifs ou nuls.

2. Établir que l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathbf{S}_n^+$, admet une solution et une seule, et que celle-ci est $Q\Delta Q^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale que l'on exprimera à l'aide de $\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), ..., \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)$, où $\widetilde{P}$ a été définie dans la partie II.

3. *Exemple :*

On prend ici $n = 4$, $P = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X} + 1$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 21 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier $P \in E$.

b. Déterminer les valeurs propres de A et montrer : $A \in \mathbf{S}_4^+$.

c. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale Q telles que $A = QDQ^{-1}$.

d. Résoudre l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathbf{S}_4^+$.

PROBLÈME 2

Partie I : Formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, \mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1.

2. a. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $\quad W_n > 0$.

3. a. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $\quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

b. En déduire, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1 W_0$.

4. a. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

b. En déduire : $\quad W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$, $\quad$ puis : $\quad W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

5. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$: $\quad A_n = \dfrac{1}{n!} n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $\quad a_n = -1 - \left(n - \dfrac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} a_n$ converge.

7. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.

8. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ est strictement positive.

9. a. Justifier : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell} n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}$.

b. En utilisant l'expression de W_{2n} à l'aide de factorielles, en déduire la valeur de ℓ et l'équivalent suivant :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Partie II : Étude de variables aléatoires

Soit un réel a strictement positif et la fonction $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par :

$$\begin{cases} f_a(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ f_a(x) = \dfrac{x}{a^2}\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f_a est une densité.

On considère une variable aléatoire X admettant f_a comme densité.

2. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

3. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ et calculer $\mathrm{E}(X)$.

4. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $\mathrm{V}(X)$ et calculer $\mathrm{V}(X)$.

5. a. On considère une variable aléatoire V suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0\,;1]$. Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(V)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.

b. En déduire un programme en langage Pascal, utilisant le générateur aléatoire Pascal, simulant la variable aléatoire X, le réel a strictement positif étant entré par l'utilisateur.

Pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$, on considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue, dans U_n, des tirages d'une boule avec remise. On suppose que tous les tirages dans U_n sont équiprobables. On s'arrête dès que l'on obtient une boule déjà obtenue.

On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

6. Justifier : $\mathrm{P}(T_n > n+1) = 0$.

7. Déterminer, pour tout entier k tel que $k \leqslant n$: $\mathrm{P}(T_n > k)$.

On considère la variable aléatoire $Y_n = \dfrac{T_n}{\sqrt{n}}$. On se propose d'étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 2}$.

Soit $y \in [0\,;+\infty[$. On note k_n l'entier naturel égal à la partie entière de $y\sqrt{n}$.
On a donc : $k_n \leqslant y\sqrt{n} < 1 + k_n$.

8. Justifier : $\mathrm{P}(Y_n > y) = \mathrm{P}(T_n > k_n)$.

9. En utilisant **I 9.b.**, montrer : $\mathrm{P}(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n}\left(1 - \dfrac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}$.

10. a. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $t \longmapsto -t + (t-1)\ln(1-t)$ en 0.

b. En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(-k_n + (k_n - n)\ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)\right) = -\frac{y^2}{2}$.

11. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2012

EM LYON 2012 VOIE S

CORRIGE

PROBLEME I

PARTIE I : INTERPOLATION POLYNOMIALE

1)

Nous noterons $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$\begin{aligned}\forall (P,Q) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(P+\lambda Q) &= ((P+\lambda Q)(a_1), \dots, (P+\lambda Q)(a_n)) \\ &= (P(a_1)+\lambda Q(a_1), \dots, P(a_n)+\lambda Q(a_n)) \\ &= (P(a_1), \cdots, P(a_n)) + \lambda (Q(a_1), \dots, Q(a_n))\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire de } F = \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ dans } \mathbb{R}^n}$$

Déterminons son noyau. Soit $P \in F$; $\varphi(P) = 0_{\mathbb{R}^n} \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ P(a_i) = 0$. Le polynôme P admet donc n racines distinctes puisque les réels a_i sont deux à deux distincts. Or $\deg P \leq n-1$, donc P est le polynôme nul.

$$\boxed{\operatorname{Ker} \varphi = \{0_{\mathbb{R}^n}\},\ \dim F = \dim \mathbb{R}^n = n, \text{ donc } \varphi \text{ est un isomorphisme de } F \text{ dans } \mathbb{R}^n}$$

2)

Grâce à la bijectivité de φ, $\forall (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n,\ \exists ! P \in F\ /\ \varphi(P) = (b_1, \dots, b_n)$:

$$\boxed{\forall (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n,\ \exists ! P \in F\ /\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ P(a_i) = b_i}$$

3)

Notons $P = a + bX + cX^2 + dX^3$.

Les conditions imposées équivalent à $\begin{cases} a &= 1 \\ a+b+c+d &= 3 \\ a+2b+4c+8d &= 11 \\ a+3b+9c+27d &= 31 \end{cases}$

Ce système équivaut sucessivement à

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b+c+d &= 2 \\ b+2c+4d &= 5 \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \\ b+3c+9d &= 10 \quad L_4 \longleftarrow \frac{1}{2}(L_4 - L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1 \\ b+c+d &= 2 \\ c+3d &= 3 \\ c+4d &= 4 \quad L_4 \longleftarrow L_4 - L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a &= 1 \\ b+c+d &= 2 \\ c+3d &= 3 \\ d &= 1 \end{cases}$$

La résolution donne $a = 1,\ b = 1,\ c = 0,\ d = 1$.

$$\boxed{P = 1 + X + X^3}$$

PARTIE II : POLYNOMES SPECIAUX

1)

Le polynôme précédent répond à la question, il y a aussi tous les polynômes à coefficients strictement positifs.

2)

Soit $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned}
\forall x > 0,\ (\lambda P)(x) &= \lambda P(x) > 0 \\
(\lambda P)'(x) &= \lambda P'(x) > 0 \\
(P+Q)(x) &= P(x) + Q(x) > 0 \\
(P+Q)'(x) &= P'(x) + Q'(x) > 0 \\
(P.Q)(x) &= P(x).Q(x) > 0 \\
(P.Q)'(x) &= P'(x)Q(x) + P(x)Q'(x) > 0
\end{aligned}$$

E n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ car il ne contient pas le polynôme nul.

3)

$\forall x > 0,\ P_1$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\forall t \in [0, x],\ P(t) > 0$, donc $\displaystyle\int_0^x P(t)dt > 0$.

$\forall x > 0,\ P_1(x) > 0$.

$\forall x > 0,\ P_1'(x) = P(x) > 0$.

$$\boxed{P_1 \text{ est élément de } E}$$

4)

Soit $P \in E$.

La fonction P est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc sur $[0, +\infty[$ car $P'(0) \geq 0$ puisque $P'(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} P'(x)$. Donc $\boxed{\forall x \geq 0,\ P(x) \geq P(0)}$

5)

$\widetilde{P}$ est la restriction de P à $[0, +\infty[$. C'est donc une fonction continue, strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image. Comme $\widetilde{P}$ est strictement croissante, P est de degré au moins égal à 1, avec un terme dominant positif strictement (sinon la limite de P en $+\infty$ serait $-\infty$ ce qui est contradiction avec une fonction croissante).

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} \widetilde{P}(x) = +\infty$ et il s'ensuit que l'image de $[0, +\infty[$ par $\widetilde{P}$ est égal à $[P(0), +\infty[$.

$$\boxed{\widetilde{P} \text{ réalise une bijection de } [0, +\infty[\text{ sur } [P(0), +\infty[}$$

6)

Notons r le degré de P. Si $P^{-1} \in \mathbb{R}[X]$, notons s le degré de P^{-1} (P^{-1} n'est pas le polynôme nul).

Ecrivons : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ et $P^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{s} b_k X^k$ avec $a_r b_s \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+,\ (P \circ P^{-1})(x) = x &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+,\ P(P^{-1}(x)) = x \\
\forall x \in \mathbb{R}_+ &\iff \sum_{k=0}^{r} a_k (P^{-1}(x))^k = x \\
\forall x \in \mathbb{R}_+ &\iff \sum_{k=0}^{r} a_k (\sum_{j=0}^{s} b_j x^j)^k = x
\end{aligned}$$

Le terme de plus haut degré de $(\sum_{j=0}^{s} b_j x^j)^k$ est $(b_s x^s)^k = b_s^k x^{sk}$.

Donc le terme de plus haut degré de $\sum_{k=0}^{r} a_k (\sum_{j=0}^{s} b_j x^j)^k$ est $a_r (b_s x^s)^r = a_r b_s^s x^{sr}$.

D'après l'hypothèse, $r \geq 2$.

Si $s \geq 1$, alors $sr \geq 2$ et on ne pourra pas avoir $a_r b_s^s x^{sr} = x$.

Si $s = 0$, alors $sr = 0$ et le polynôme $P \circ P^{-1}$ est de degré 0 ; il ne peut être égal à X.

On peut dire aussi : $s = 0 \Longrightarrow P^{-1}$ est constant ; cela n'est pas possible car P^{-1} est une bijection.

$$\boxed{P^{-1} \text{ n'est pas une application polynomiale}}$$

PARTIE III : MATRICES SYMETRIQUES POSITIVES

1)

La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2–a)

Soit $\lambda \in \text{spect}(A)$ et U une colonne propre associée :

$AU = \lambda U \Longrightarrow {}^tUAU = {}^tU\lambda U = \lambda {}^tUU = \lambda ||U||^2$. Donc ${}^tUAU = \lambda ||U||^2$.

La matrice A est positive, donc ${}^tUAU \geq 0$; $U \neq (0) \Longrightarrow ||U|| > 0$, donc $\lambda = \dfrac{{}^tUAU}{||U||^2} \geq 0$.

$$\boxed{\text{spect}(A) \subset \mathbb{R}_+}$$

2–b)

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A non nécessairement distinctes.

Il existe $P \in \text{GL}_n(R)$ telle que $A = P\,\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^tP$

Soit $V = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^tV\,\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)V = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \geq 0$ (Calcul classique).

De plus, la matrice $\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est symétrique réelle, donc $\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in S_n^+$.

$$\begin{aligned}
\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tUAU &= {}^tUP\,\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^tPU \\
&= {}^t({}^tPU)\,\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^tPU
\end{aligned}$$

Posons $V = {}^tPU$, alors $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et l'on a : ${}^tUAU = {}^tV\,\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)V \geq 0$ d'après ce que l'on vient de voir.

De plus

$$\begin{aligned}
{}^tA &= {}^t(P\,\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^tP) \\
&= {}^t({}^tP)^t\,\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^tP \quad \text{(propriété classique de la transposition)} \\
&= P\,\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^tP \quad (\text{car } \text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \text{ est symétrique}) \\
{}^tA &= A
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tUAU \geq 0 \text{ et } A \text{ symétrique, donc } A \in S_n^+}$$