Code épreuve : 290

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2013

Concepteur : ESSEC

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES

Vendredi 10 mai de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine.

On étudie le modèle suivant :

- le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée est une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$;
- les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On suppose que les variables U_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées, et sont indépendantes de N ;
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$, et X_0 est la variable certaine de valeur 0 ;
- la charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire X définie par :

$$X = \sum_{k=1}^{N} U_k$$

et l'on précise que $X = X_0 = 0$ si N prend la valeur 0.

On dit que X suit une loi composée.

- Pour tout entier naturel j, on pose $p_j = P(N = j)$, $q_j = P(U_1 = j)$ et $r_j = P(X = j)$.

Tournez la page S.V.P.

Partie I - Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel de l'intervalle $]0,1[$.

1. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, quelle est la loi de X_n ?

2. Pour tout entier naturel j, établir : $r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n = j)\, p_n$.

3. Dans cette question 3, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m, entier naturel, et π, réel dans $]0,1[$.
   Soit j un entier naturel.
   (a) Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.
   (b) Établir : si $j \in [\![0, m]\!]$, $r_j = \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$.
   (c) Vérifier : pour tous entiers j, n, m tels que $0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m$, $\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}$.
   (d) En déduire, pour tout $j \in [\![0, m]\!]$: $r_j = \binom{m}{j}(p\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big[(1-p)\pi\big]^{\ell} (1-\pi)^{m-j-\ell}$.
   (e) Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m, p et π.

4. On suppose dans cette question 4 que N suit la loi de Poisson de paramètre λ, réel strictement positif.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel j, on a :
   $$r_j = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \left[\lambda(1-p)\right]^{n-j}.$$
   (b) En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ.

Partie II - La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binômiaux aux nombres réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\binom{y}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (y-i)$, et $\binom{y}{0} = 1$.

5. Écrire une fonction récursive en Pascal d'entête `function cb(y:real;k:integer):real` qui calcule $\binom{y}{k}$.

6. *La formule du binôme négatif.*
   Soit c un réel strictement positif, et x un réel de $[0,1[$.
   (a) Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}}\, \mathrm{d}t$.
   En utilisant une formule de Taylor, établir :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c\binom{c+n}{n} I_n.$$

(b) Vérifier que pour tout $t \in [0, x]$: $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

En déduire l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.

(c) i. Montrer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\dbinom{c+n}{n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{k}\right)$.

ii. Montrer que pour tout réel t positif, $\ln(1+t) \leqslant t$.

iii. Établir, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln k - \ln(k-1)$.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n$.

iv. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\ln\left[\dbinom{c+n}{n}\right] \leqslant c(1+\ln n)$.

En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\binom{c+n}{n}x^{n+1} = 0$.

(d) En conclure que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\binom{c+k-1}{k}x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{c+k-1}{k}x^k = \frac{1}{(1-x)^c}.$$

7. Soit p un réel de $]0,1[$ et r un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $p_k = \dbinom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres r et p.

8. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et p, reconnaître la loi de $Y+1$.

9. *Espérance et variance.*
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in]0,1[$.

(a) Montrer : pour tout entier $k \geqslant 1$, $\quad k\dbinom{r+k-1}{k} = r\dbinom{r+k-1}{k-1}$.

(b) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $E(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p}$.

(c) Montrer que Z admet une variance et que l'on a : $V(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.

On pourra commencer par calculer l'espérance de $Z(Z-1)$.

Partie III - Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = P(N=k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels a et b, avec $a < 1$ et $a+b > 0$, tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right)p_{k-1}.$$

Tournez la page S.V.P.

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a, b)$.

10. *Détermination des lois de Panjer.*

    (a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right)$.

    (b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
    Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b.

    (c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

    i. Montrer qu'il existe un unique entier naturel r, tel que : $\forall k > r$, $p_k = 0$ et $\forall k \leqslant r$, $p_k \neq 0$.
    On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.

    ii. Montrer : $b = -a(r + 1)$.

    iii. Établir que pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0$.
    En déduire que $p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^r}$.

    iv. En conclure que N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres en fonction de a et b.

    (d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

    i. Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $p_k = \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k p_0$.

    ii. En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b.

11. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par : $E(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ et $V(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$.

Partie IV - L'algorithme de Panjer

- On reprend les notations de l'introduction du sujet et de la partie III.
- Si A est un événement et Y une variable aléatoire, on note, si elle existe, $E_A(Y)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant A.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de q_0 puis établir que $r_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} {q_0}^n p_n$.

13. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

    (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $E_{(X_n=j)}(X_n)$? En déduire : $E_{(X_n=j)}(U_1) = \dfrac{j}{n}$.

    (b) Établir : $r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n = j) \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} E_{(X_n=j)} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) P(X_n = j) p_{n-1}$.

    (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E_{(X_n=j)} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) P(X_n = j) = \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) P(U_1 = i) P(X_{n-1} = j - i).$$

(d) En conclure : $r_j = \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i}$, puis :

$$r_j = \frac{1}{1 - aq_0} \left(\sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i} \right).$$

Cette formule permet de calculer récursivement les nombres r_j et ainsi de déterminer la loi de X.

14. *Des exemples d'application.*

(a) Dans cette question, les variables U_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.

i. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $r_j = \frac{p}{1 - a + ap} \left(a + \frac{b}{j}\right) r_{j-1}$.
En déduire que X suit une loi de Panjer.

ii. Retrouver les résultats des questions 3 et 4 de la partie I.

(b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, rappelons que cela entraîne que N suit la loi de Poisson de paramètre b.
Soit p un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

i. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que la famille de nombre $(q_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ définie par $q_i = \alpha \frac{p^i}{i}$ définisse une loi de probabilité d'un variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (*loi logarithmique discrète*). On pose $q_0 = 0$.
On suppose que les variables U_k suivent cette loi de probabilité.

ii. Montrer que pour tout entier $j \geqslant 1$, on a : $r_j = \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=1}^{j} p^i r_{j-i}$.

iii. En utilisant un changement d'indice, établir pour tout $j \geqslant 2 : r_j = \left(p + \frac{p(b\alpha - 1)}{j}\right) r_{j-1}$, puis montrer que cette égalité est encore vérifiée pour $j = 1$.

iv. Conclure que X suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de b, α et p.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2013

ESSEC 2013 VOIE E MATH III

CORRIGE

Le symbôle $\hookrightarrow$ veut dire " suit la loi de probabilité " :
$T \hookrightarrow \mathcal{G}$ **veut dire " la variable** T **suit la loi de probabilité** $\mathcal{G}$.

PARTIE I : des exemples

1)

$X_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ est la somme de n variables de Bernoulli, indépendantes, de même paramètre p, donc $\boxed{X_n \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n, p}$

2)

Remarquons que l'écriture $X = \sum_{k=1}^{N} U_k$ n'a pas de sens pour les candidats de cette filière car N n'est pas un entier mais une variable aléatoire !

Ce qui a un sens c'est $X(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} U_k(\omega)$ si $N(\omega) \geq 1$ et $X(\omega) = 0$ si $N(\omega) = 0$.

La famille $(N = j)_{j \geq 0}$ est un système pseudo-complet d'événements (certains événements peuvent être quasi-impossibles). Appliquons la formule des probabilités totales.

$$\forall j \in \mathbb{N},\ P(X = j) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n \cap X = j).$$

Si $p_n = P(N = n) > 0$, alors $P(N = n \cap X = j) = P(N = n)P_{[N=n]}(X = j)$.
Considérons $\omega \in \Omega \ /\ N(\omega) = n$;

Si $n \geq 1$, alors $X(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} U_k(\omega) = \sum_{k=1}^{n} U_k(\omega)$, donc $\forall \omega \in \Omega \ /\ \omega \in (N = n),\ X(\omega) = X_n(\omega)$.
On remarque que ce résultat est valable pour $n = 0$ car dans ce cas $X(\omega) = X_0(\omega) = 0$.

$$p_n > 0 \Longrightarrow P(N = n \cap X = j) = P(N = n)P_{[N=n]}(X = j) = p_n P(X_n = j).$$

Si $p_n = P(N = n) = 0$, l'inclusion $(N = n \cap X = j) \subset (N = n)$ implique $P(N = n \cap X = j) = 0$
Or $p_n P(X_n = j) = 0$.

$$p_n = 0 \Longrightarrow P(N = n \cap X = j) = p_n P(X_n = j).$$

Donc, dans les deux cas, $P(N = n \cap X = j) = p_n P(X_n = j)$.

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N},\ P(X=j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(X_n = j)}$$

3–a)

$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N(\omega)} U_k(\omega)$ d'après la question 2) (relation valable si $N(\omega) \geq 1$). La variable U_k est de Bernoulli, donc $U_k(\omega) \in \{0,1\}$. Par conséquent $\displaystyle\sum_{k=1}^{N(\omega)} U_k(\omega) \leq N(\omega)$. Puisque $N \hookrightarrow B(m,\pi)$, $N(\omega) \leq m$. Il en résulte que $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq m$ (inégalité valable si $N(\omega) = 0$ puisqu'alors $X(\omega) = X_0(\omega) = 0$).

$$\boxed{X(\Omega) \subset [\![0,m]\!] : \forall j > m,\ r_j = P(X=j) = 0}$$

3–b)

$\forall j \in \mathbb{N},\ r_j = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(X_n = j)$.

La variable X_n suit la loi binomiale $B(n,p)$, donc $\forall j > n \Longrightarrow P(X_n = j) = 0$. Par suite $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(X_n = j) = \sum_{n=j}^{+\infty} p_n P(X_n = j)$.

D'autre part, $N \hookrightarrow B(m,\pi)$, donc $P(N=n) = 0$ si $n > m$; par suite

$$\sum_{n=j}^{+\infty} p_n P(X_n = j) = \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$$

Cette expression a un sens car $j \in [\![0,m]\!]$, donc $j \leq m$.

$$\boxed{\forall j \ /\ j \leq m,\ r_j = \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j}\binom{m}{n} p^j (1-p)^{n-j} \pi^n (1-\pi)^{m-n}}$$

3–c)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{j}\binom{m}{n} &= \frac{n!}{j!(n-j)!} \times \frac{m!}{n!(m-n)!} \\
&= \frac{m!}{j!(m-j)!} \times \frac{(m-j)!}{(n-j)!(m-n)!} \\
&= \binom{m}{j} \times \frac{(m-j)!}{(n-j)!(m-j-(n-j))!} \\
&= \binom{m}{j} \times \binom{m-j}{n-j}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous entiers } j,n,m \text{ tel que } 0 \leq j \leq n \leq m,\ \binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j} \times \binom{m-j}{n-j}}$$

3–d)

L'égalité du 3–b) s'écrit

$$\begin{aligned}
r_j &= p^j \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j}\binom{m}{n} (1-p)^{n-j} \pi^n (1-\pi)^{m-n} \\
&= p^j \sum_{n=j}^{m} \binom{m}{j} \times \binom{m-j}{n-j} (1-p)^{n-j} \pi^n (1-\pi)^{m-n} \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= p^j \binom{m}{j} \sum_{n=j}^{m} \binom{m-j}{n-j} (1-p)^{n-j} \pi^n (1-\pi)^{m-n} \quad \text{on pose } \ell = n-j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_j &= p^j \binom{m}{j} \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} (1-p)^\ell \pi^{\ell+j} (1-\pi)^{m-(\ell+j)} \\ &= p^j \binom{m}{j} \pi^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} (1-p)^\ell \pi^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell} \\ &= p^j \binom{m}{j} \pi^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \Big(\pi(1-p)\Big)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell} \\ &= p^j \binom{m}{j} \pi^j \Big(\pi(1-p)+(1-\pi)\Big)^{m-j} \quad \text{d'après le binôme de Newton} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall j \in [\![0,m]\!],\ P(X=j) = \binom{m}{j} p^j \pi^j (1-p\pi)^{m-j}}$$

3–e)

En résumé : $X(\Omega) = [\![0,m]\!]$ d'après les questions 3–a) et 3–d).

$\forall j \in [\![0,m]\!],\ P(X=j) = \binom{m}{j} (p\pi)^j (1-p\pi)^{m-j}$.

$$\boxed{X \hookrightarrow B(m, p\pi)}$$

4–a)

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N},\ P(X=j) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\ &= \sum_{n=j}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \quad \text{car } \binom{n}{j} = 0 \text{ si } n<j \\ & e^{-\lambda} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{\lambda^n}{n!} p^j (1-p)^{n-j} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-j)!} (1-p)^{n-j} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \lambda^j \frac{\lambda^{n-j}}{(n-j)!} (1-p)^{n-j} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N},\ P(X=j) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-j}}{(n-j)!}}$$

4–b)

Dans la somme précédente, posons $k = n-j$, on obtient

$$\begin{aligned} P(X=j) &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} e^{\lambda(1-p)} \quad \text{on aura reconnu la somme d'une série exponentielle} \\ &= e^{-\lambda+\lambda(1-p)} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \end{aligned}$$

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}\ ;\ \forall j \in \mathbb{N},\ P(X=j) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^j}{j!},\ \text{donc } X \hookrightarrow P(\lambda p)}$$