Code épreuve : 297

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2013

Conception : ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

6 mai 2013 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge.

Le but de cet exercice est de prouver que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ converge également et que, de plus, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.

1) Étude d'un exemple : pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = n(n+1)$.

a) Vérifier que $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ puis en déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.

b) Pour tout entier naturel non nul, déterminer u_n en fonction de n.

c) Établir la convergence de la série de terme général u_n et donner sa somme, puis en déduire l'inégalité demandée.

2) Étude d'un deuxième exemple.

On suppose, dans cette question, que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_n = n!$.

a) Écrire une déclaration de fonction Pascal dont l'en-tête est **function fact (*n* : integer) : integer ;** et qui renvoie $n!$ à l'appel de fact(n).

b) Écrire le corps principal d'un programme Pascal, utilisant cette fonction, et permettant de calculer et d'afficher la valeur de u_n lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.

c) Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$.

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n \leq \dfrac{1}{(n-1)!}$.

e) En déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}$.

On revient au cas général.

3) Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (1+2+...+n)^2 \leq (a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+...+\frac{n^2}{a_n}\right)$$

4) a) Utiliser le résultat précédent pour établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2n+1}{a_1+a_2+...+a_n} \leq 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}$$

b) En déduire, par sommation, que : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{N} \dfrac{2n+1}{a_1+a_2+...+a_n} \leq 4\sum_{k=1}^{N}\dfrac{1}{a_k}$.

c) Montrer enfin que la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+...+a_n}$ converge puis établir le résultat demandé.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par E un espace vectoriel de dimension n et on rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.
Pour finir, on désigne par Id l'endomorphisme identité de E.

1) Étude d'un premier exemple ($n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$).

On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{Im} f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par f.

2) Étude d'un deuxième exemple ($n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$).

On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de f.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par f.

On suppose dans la suite que E est un espace euclidien de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme de x est notée $\| x \|$.

On considère un endomorphisme f de E qui possède au moins une valeur propre λ réelle et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan de E stable par f.

3) On note f^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

a) Vérifier que l'on a : $\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.

b) Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$$

4) a) Montrer que λ est valeur propre de f^*.

b) On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ.

Montrer que $(\mathrm{vect}(u))^{\perp}$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

Exercice 3

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \le -1 \text{ ou } x \ge 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.
Dans la suite, on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et admettant toutes f comme densité.

De plus, pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \text{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $Y_n = \dfrac{S_n}{n}$. On admet que S_n et Y_n sont des variables aléatoires à densité définies, elles aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2) Déterminer la fonction de répartition, notée F, commune aux variables aléatoires X_k.
3) On note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n. Déterminer explicitement $G_n(x)$ en fonction de n et x.

4) a) Montrer que, pour tout réel x négatif ou nul, on a $G_n(x) \le \dfrac{1}{2^n}$.

b) Justifier que, pour tout réel x strictement positif, il existe un entier naturel n_0 non nul, tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a $x > \dfrac{1}{n}$.

En déduire que : $\forall x > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \ge n_0, G_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2nx}\right)^n$.

5) a) Déterminer, pour tout réel x, la limite de $G_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note $G(x)$ cette limite.
b) Montrer que la fonction G ainsi définie est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
c) En déduire que la suite $(Y_n)_{n\ge1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont la fonction de répartition est G.

6) Vérifier que la variable aléatoire $\dfrac{1}{Y}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Problème

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ, où λ désigne un réel strictement positif. On se propose de déterminer un équivalent de la probabilité $P(X = Y)$ lorsque λ est au voisinage de $+\infty$.

Partie 1

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt$.

1) a) Calculer u_0 et u_1.
b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
2) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)\,u_{n+2} = (n+1)\,u_n$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)\,u_{n+1}\,u_n = \dfrac{\pi}{2}$.

d) En déduire la valeur de u_{2n+1}.

3) a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n}$.

b) En déduire, en utilisant les variations de (u_n), que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

c) Montrer enfin que l'on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Partie 2

1) Établir, pour tout réel x, la convergence de l'intégrale $I(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Dans la suite de cette partie, x désigne un réel strictement positif.

2) a) Montrer qu'il existe une constante M telle que : $0 \le \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}dt \le M$.

b) Montrer que : $\forall u \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ 1 \le \frac{1}{\sqrt{1-u}} \le 1+u$.

3) a) En se référant à une loi normale, donner les valeurs de $\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}dt$ et $\int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-t^2}dt$.

b) Utiliser le changement de variable $u = \sqrt{tx}$ pour montrer que : $\int_{0}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}dt \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

c) Montrer de la même façon que : $\int_{0}^{1} e^{-tx}\sqrt{t}\,dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}$.

4) a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1+t$, que :

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_{0}^{1} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}du$$

b) Utiliser le résultat de la question 2 b) pour en déduire que : $I(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$.

Partie 3

1) Exprimer comme somme d'une série la probabilité $P(X = Y)$.

2) a) On désigne par t un réel de $[-1, 1]$ et par x un réel strictement positif.
Montrer que, pour tout u compris entre 0 et $-tx$, on a : $e^u \le e^x$. Écrire ensuite l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ pour la fonction $u \mapsto e^u$ entre 0 et $-tx$.

b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \int_{0}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt = u_k$.

c) Déduire des deux questions précédentes que : $\left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \right| \le \frac{2x^{2n+1}e^x}{\pi(2n+1)!}u_{2n+1}$.

d) Montrer enfin que : $\forall x > 0,\ I(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}$.

3) Établir que : $P(X = Y) \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 13 1247 – D'après documents fournis.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES

EDHEC 2013 VOIE S

CORRIGE

EXERCICE I

1–a)

$a_n = n(n+1)$;

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$ (somme télescopique).

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$. Cela veut dire :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{1}{a_n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 1}$$

1–b)

$$u_n = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} (k^2+k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

Donc $u_n = \dfrac{n}{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$; $\boxed{u_n = \dfrac{3}{(n+1)(n+2)}}$

1–c)

$u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{3}{n^2}$; la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($2 > 1$), donc par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente. D'autre part, $u_n = \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n+2}$, donc

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (\frac{3}{k+1} - \frac{3}{k+2}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{n+2}.$$

Il s'ensuit que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2} \leq 2$. D'après le a), $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}}$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

2–a)

```
FUNCTION FACT( n : integer) : integer ;
var y, k : integer ;
BEGIN
if n = 0 then y := 1 else begin y := 1 ;
                                for k := 1 to n do y := y*k
                          end ;
FACT := y ;
END ;
```

2–b)

```
PROGRAM EDHEC .
var n, s, k : integer ; u : real ;
BEGIN
write(' n entier naturel non nul = ') ; readln(n) ;
s := 0 ;
for k := 1 to n do s := s+fact(k) ;
u := n/s ;
write(' u = ', u) ;
END.
```

2–c)

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n!}$; la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ est une série exponentielle, elle converge donc.

2–d)

- $\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} k! \geq n!$; donc $u_n = \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} k!} \leq \dfrac{n}{n!}$: $\boxed{u_n \leq \dfrac{1}{(n-1)!}}$

- Cela prouve (comparaison des séries à termes positifs) que la série de terme général u_n est convergente et l'on a $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq e$. D'autre part,

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} = e - 1$; or $e \leq 2(e-1)$ (car $e \geq 2$), donc $e \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ et par suite

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}}$$

3)

$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \times \frac{k}{\sqrt{a_k}}$.

Notons $X = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}) \in \mathbb{R}^n$ et $Y = (\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{2}{\sqrt{a_2}}, \cdots, \frac{n}{\sqrt{a_n}}) \in \mathbb{R}^n$; munissons $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\langle X, Y\rangle^2 \leq ||X||^2||Y||^2$.
Ce qui donne immédiatement

$$\boxed{(1 + 2 + \cdots + n)^2 \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \cdots + \frac{n^2}{a_n})}$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

4–a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} &\leq \frac{1}{(1+2+\cdots+n)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k} \quad \text{d'après l'inégalité précédente}\\ &\leq \frac{1}{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\\ &\leq \frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\end{aligned}$$

$\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, donc $\frac{1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{2n+1}\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)$. En reportant dans l'inégalité précédente, il vient

$$\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq \frac{4}{2n+1}\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}$$

$$\boxed{\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq 4\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}}$$

4–b)

Sommons les inégalités précédentes pour $n=1$ à N ; on obtient :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq 4\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}=\sum_{n=1}^{N}\Big(\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2})\frac{k^2}{a_k}\Big)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2})\frac{k^2}{a_k}$.

Intervertissons les ordres de sommations en remarquant que l'on a toujours $1\leq k\leq n\leq N$. Cela donne

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2})\frac{k^2}{a_k} &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N}(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2})\frac{k^2}{a_k}\\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{k^2}{a_k}\sum_{n=k}^{N}(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2})\\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{k^2}{a_k}\Big(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\Big) \quad \text{somme télescopique}\\ &\leq \sum_{k=1}^{N}\frac{k^2}{a_k}\frac{1}{k^2} \quad \text{car } \frac{1}{k^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\leq\frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

Finalement

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq 4\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k} \text{ et}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k} \leq \sum_{k=1}^{N}\frac{k^2}{a_k}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}, \text{ donc}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}}$$

Par comparaison des séries à termes positifs, cette inégalité prouve que la série de terme général $\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ est convergente puisque la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ l'est. De plus $\frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leq\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$, donc la série de terme général $\frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ converge également.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.