Code épreuve : 290

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2012

Concepteur : ESSEC

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHEMATIQUES

Jeudi 10 mai de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Ce problème comporte trois parties relativement indépendantes.
Dans la première partie on étudie les lois log-normales. On s'intéresse dans la partie II à une modélisation du cours d'une action appelée modèle binomial ou de Cox-Ross-Rubinstein et à son comportement asymptotique. Dans la troisième partie, on établit la formule de Black et Scholes, pour le prix d'une option dans le modèle limite obtenu dans la partie II.

Notations et définitions

- Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- On note respectivement $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, lorsque celles-ci existent.
- Soit m un réel et σ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si X est à valeurs strictement positives et si $\ln(X)$ suit la loi normale de paramètres (m, σ^2). On écrit alors $X \hookrightarrow \mathscr{LN}(m, \sigma^2)$.

Partie I - Quelques propriétés des lois log-normales

On note dans cette partie m un réel et σ un réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi log-normale de paramètres (m, σ^2).
On pourra dans la suite utiliser la variable aléatoire $Y = \ln(X)$.

1. Soit a et b deux réels, a étant différent de 0. On rappelle que si U est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres (m, σ^2), alors $aU + b$ suit aussi une loi normale.
   Quels en sont les paramètres ?
2. *Cas où* $m = 0$.
   On suppose dans cette question 2 que $X \hookrightarrow \mathscr{LN}(0, \sigma^2)$.
   (a) *Densité.*
   Exprimer la fonction de répartition F de X en fonction de Φ .
   En déduire que X est une variable aléatoire à densité et que la fonction définie par
   $$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(\ln(x))^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$
   est une densité de probabilité de X.
   (b) *Espérance.*
   i. Établir l'existence de $E(X)$ et l'égalité $E(X) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right) \mathrm{d}y$.
   ii. En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{y}{\sigma} - \sigma$, en déduire $E(X)$ en fonction de σ.
   (c) *Variance.*
   i. Soit α un réel non nul. Montrer que X^α suit une loi log-normale dont on précisera les paramètres.
   ii. En déduire que X admet une variance et que $V(X) = \mathrm{e}^{\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$.
3. On reprend le cas général : $X \hookrightarrow \mathscr{LN}(m, \sigma^2)$.
   (a) Soit μ un réel strictement positif.
   Montrer que μX suit une loi log-normale de paramètres $(m + \ln(\mu), \sigma^2)$.
   (b) Justifier l'existence de $E(X)$, de $V(X)$, et établir :
   $$E(X) = \mathrm{e}^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \mathrm{e}^{2m+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right).$$

Partie II - Le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein

Soit n un entier naturel non nul.
On souhaite modéliser l'évolution du cours d'une action entre les dates 0 et t fixé, strictement positif.
On suppose qu'initialement ce cours est $S_{0,n} = 1$ et si l'on note $S_{k,n}$ la valeur aléatoire de ce cours à la date $\dfrac{kt}{n}$, $k \in \{1, ..., n\}$, on a la relation :

$$S_{k,n} = S_{k-1,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right), \quad \text{où}$$

- μ est une constante réelle strictement positive liée au rendement moyen de l'action sur une durée égale à t ;
- v est une constante réelle strictement positive appelée volatilité de l'action sur la durée t ;
- $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1,1\}$ (autrement dit, $P(Y_k=1)=P(Y_k=-1)=\frac{1}{2}$).

  On suppose que n est assez grand pour que $1+\frac{\mu}{n}-\frac{v}{\sqrt{n}}>0$.

On admet que $S_{0,n}, ..., S_{n,n}$ sont des variables aléatoires discrètes.
On note C_n la variable aléatoire $S_{n,n}$, qui modélise le cours de l'action à l'instant t.

4. *Simulation de la variable aléatoire C_n.*

   (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre l'expression Pascal : 2***random**(2)−1 ?

   (b) Dans la déclaration de fonction qui suit, remplacer les « ... » par des expressions Pascal pour que la fonction ainsi déclarée simule la variable aléatoire C_n.

```
function C(n:integer;mu,v:real):real;
var k:integer; tmp:real;
begin
        tmp:=1;
        for k:= ... to ... do
                tmp:=tmp*   ...   ;
        C:= ... ;
end;
```

5. (a) Calculer l'espérance et la variance commune aux Y_k.

   (b) i. Montrer l'égalité : $C_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}Y_k\right)$.

   ii. En déduire que $E(C_n)=\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n$ et $V(C_n)=\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)^n-\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{2n}$.

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}E(C_n)$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}V(C_n)=\mathrm{e}^{2\mu}(\mathrm{e}^{v^2}-1)$.
   Déterminer les paramètres de la loi log-normale ayant pour espérance la première limite et pour variance la seconde.

6. (a) Expliciter un couple de réels (a_n,b_n) tel que :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\quad \ln\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}Y_k\right)=a_n+b_nY_k\ .$$

   (b) En déduire que $\ln(C_n)=na_n+b_n\sum_{k=1}^{n}Y_k$.

   (c) Établir la convergence en loi, quand n tend vers $+\infty$, de $\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1+\cdots+Y_n)$ vers la loi normale centrée réduite. On énoncera précisément le théorème utilisé.

7. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ au voisinage de 0.

   (b) Déterminer les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions $x\mapsto\ln(1+vx+\mu x^2)$ et $x\mapsto\ln(1-vx+\mu x^2)$.

(c) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} na_n = \mu - \frac{v^2}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, b_n = v$.

En déduire que b_n est strictement positif à partir d'un certain rang.

On suppose dans la suite que cette condition est réalisée.

8. On note F_n la fonction de répartition de $\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n)$ et G_n la fonction de répartition de $\ln(C_n)$.

Soit x un réel. On pose $y = \frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}$.

(a) Soit ε un réel strictement positif.

i. Établir l'existence d'un réel η strictement positif tel que

$$\Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \Phi(y-\eta) \leqslant \Phi(y+\eta) \leqslant \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

ii. Montrer qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$:

$$y - \eta \leqslant \frac{x - na_n}{\sqrt{n} b_n} \leqslant y + \eta\ .$$

iii. Montrer qu'il existe un entier naturel n_2 tel que, pour tout $n \geqslant n_2$:

$$F_n(y+\eta) \leqslant \Phi(y+\eta) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad F_n(y-\eta) \geqslant \Phi(y-\eta) - \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

iv. Montrer que $G_n(x) = F_n\left(\frac{x - na_n}{\sqrt{n}\, b_n}\right)$, et en déduire que, pour n assez grand, on a :

$$\left| G_n(x) - \Phi\left(\frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right) \right| \leqslant \varepsilon.$$

(b) En conclure que la suite de variables aléatoires $\left(\ln(C_n)\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres.

9. Démontrer que $(C_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi log-normale de paramètres $\left(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2\right)$.

PARTIE III - La formule de Black et Scholes

Soit t un réel strictement positif.

À la date 0, un investisseur achète sur un marché une option sur une action dont la date d'échéance est t et le prix d'exercice K, un réel strictement positif.

- Si à la date t, le cours C de l'action est supérieur ou égal à K, il peut acheter l'action au prix K et la revendre au prix C ;
- dans le cas contraire, son option n'a plus de valeur à la date t.

Le but de cette partie est de donner une valeur raisonnable au prix d'achat de l'option, que l'on note π_K.

On fait les hypothèses suivantes :

- On choisit comme unité le cours de l'action à la date 0 c'est-à-dire qu'à cet instant le cours de l'action vaut 1.

- Le cours de l'action à la date t est une variable aléatoire C qui suit une loi log-normale de paramètres (m, v^2).
- On suppose qu'il existe sur le marché un actif non risqué dont le taux de rentabilité entre les dates 0 et t vaut $\mathrm{e}^r - 1$, où r est un réel strictement positif.
- On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par, pour tout x réel, $f(x) = \max(0, x)$.

10. (a) Justifier que la valeur de l'option à la date t est $f(C - K)$.
 (b) Si au lieu d'acheter l'option, l'investisseur avait placé à la date 0 son prix d'achat π_K sur l'actif non risqué, quel serait la valeur de son placement à la date t ?
 (c) En déduire qu'il convient de poser $\pi_K = \mathrm{e}^{-r} E\left(f(C - K)\right)$ si l'on veut que ces deux stratégies aient la même rentabilité moyenne.
 Dans les questions suivantes, c'est cette valeur de π_K que l'on utilise.

11. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
 (b) Établir l'existence de $E\big(f(C - K)\big)$ et l'égalité

$$E(f(C-K)) = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(K)}^{+\infty} (\mathrm{e}^x - K) \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right) \mathrm{d}x\,.$$

12. (a) Montrer l'égalité :

$$\pi_K = \exp\left(m - r + \frac{v^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{v^2 + m - \ln(K)}{v}\right) - K\,\mathrm{e}^{-r}\,\Phi\left(\frac{m - \ln(K)}{v}\right).$$

 (b) On suppose que $m = r - \dfrac{v^2}{2}$, ce qui signifie que le rendement moyen de l'action et de l'actif non risqué sont identiques.
 Établir la formule de Black-Scholes :

$$\pi_K = \Phi\left(\frac{r - \ln(K)}{v} + \frac{v}{2}\right) - K\,\mathrm{e}^{-r}\,\Phi\left(\frac{r - \ln(K)}{v} - \frac{v}{2}\right).$$

13. Dans la pratique, le prix de l'option est fixé par le marché et vaut x, où x est un réel strictement positif. On pose $\theta = r - \ln(K)$, de sorte que le prix d'échéance vaut $K = \exp(r - \theta)$.
 On appelle alors volatilité implicite de l'action, tout réel positif v, s'il en existe, tel que :

$$x = \Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) - \mathrm{e}^{-\theta}\,\Phi\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right).$$

 On définit alors la fonction $\Psi : v \mapsto \Phi\left(\dfrac{\theta}{v} + \dfrac{v}{2}\right) - \mathrm{e}^{-\theta}\,\Phi\left(\dfrac{\theta}{v} - \dfrac{v}{2}\right)$ sur $]0, +\infty[$.
 (a) Montrer que Ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $v > 0$,

$$\Psi'(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right)^2\right)$$

 Dresser le tableau de variations de Ψ en y faisant figurer les limites en 0 et en $+\infty$.
 On distinguera les cas $\theta > 0$ et $\theta \leqslant 0$.
 (b) Déterminer pour quelles valeurs de x il existe une volatilité implicite et prouver alors qu'elle est unique.
 En conclure finalement que l'on peut définir *la* volatilité implicite si et seulement si :

$$f\left(1 - \mathrm{e}^{-\theta}\right) < x < 1\,.$$

ANNALES DE MATHEMATIQUES

ESSEC MATH III 2012 VOIE ECONOMIQUE

CORRIGE

Nous écrirons indifférement e^x ou $\exp(x)$.

Le symbôle $\hookrightarrow$ veut dire " suit la loi " :

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ **veut dire** X **suit la loi** $\mathcal{N}(0,1)$**.**

PARTIE I : quelques propriétés des lois log-normales

1)

$E(aU+b) = aE(U)+b = am+b$: $V(aU+b) = V(aU) = a^2V(U) = (a\sigma)^2$. Donc

$$\boxed{U \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2) \Longrightarrow aU+b \hookrightarrow \mathcal{N}(am+b,(a\sigma)^2)}$$

2–a)

Densité

$X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$, donc $\forall x \leq 0$, $P(X \leq x) = 0$.

$X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0,\sigma^2) \Longleftrightarrow \ln X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Donc $\frac{1}{\sigma}\ln X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ d'après les propriétés rappelées en début de texte .

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ P(X \leq x) &= P(\ln X \leq \ln x) \quad \text{car la fonction ln est strictement croissante}\\ &= P(\tfrac{1}{\sigma}\ln X \leq \tfrac{1}{\sigma}\ln x) \quad \text{car } \sigma > 0.\end{aligned}$$

Si nous notons, d'une manière générale, F_T la fonction de répartition d'une variable aléatoire T et Φ la fonction de répartition d'une variable qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \Phi(\frac{1}{\sigma}\ln x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Notons f_X une densité de X (notation que nous utiliserons par la suite).

$\forall x < 0,\ F_X(x) = 0 \Longrightarrow f_X(x) = 0$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sigma}\ln x$ est dérivable et à valeurs dans $\mathbb{R}$; la fonction Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$; par composition la fonction $x \mapsto \Phi(\frac{1}{\sigma}\ln x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x\sigma}\varphi(\frac{1}{\sigma}\ln x)$ où traditionnellement φ est la dérivée de Φ.

Nous prendrons $f_X(0) = 0$, ce qui donne

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\dfrac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}}$$

2–b)

Espérance

i) Comme $f_X(x) = 0$ sur $]-\infty, 0]$,

$E(X)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2})dx$ converge (la convergence absolue est superflue car $x\dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\dfrac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$).

La fonction que l'on intègre $x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2})$ est continue, positive sur $]0, +\infty[$: l'intégrale est impropre uniquement en 0 et $+\infty$.

Etude en 0. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}) = 0.$

Cette fonction est prolongeable par continuité en 0, l'intégrale est impropre en 0, donc convergente. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2})dx$ converge.

Etude en $+\infty$.

$$\begin{aligned}
x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(\ln x^2) \exp(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(2\ln x) \exp(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(2\ln x - \frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}) \\
2\ln x - \frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2} &= (2 - \frac{\ln x}{2\sigma^2}) \ln x \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} (2\ln x - \frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}) = -\infty
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}) = 0$ veut dire $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}) \underset{(+\infty)}{=} \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est convergente d'après le critère de Riemann ($2 > 1$) ; par la règle de négligeabilité des fonctions continues, positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2})dx$ est convergente. Donc

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2})dx \text{ converge, l'espérance } E(X) \text{ existe}}$$

<u>**Calcul de l'espérance**</u>

Soit $(a, A) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ tels que $a < A$; notons $I(a, A) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^A \exp(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2})dx$.

Faisons le changement de variable $y = \ln x \Longleftrightarrow x = e^y$; $dx = e^y dy$.

$I(a, A) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\ln a}^{\ln A} \exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2}) e^y dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\ln a}^{\ln A} \exp(y - \frac{y^2}{2\sigma^2})dy.$

Comme l'intégrale converge, on peut prendre la limite lorsque $a \to 0^+$ et $A \to +\infty$. On obtient

$$E(X) = \lim_{\substack{a\to 0^+ \\ A\to+\infty}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\ln a}^{\ln A} \exp(y - \frac{y^2}{2\sigma^2})dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(y - \frac{y^2}{2\sigma^2})dy$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y))dy}$$

ii)

Posons donc $t = \frac{y}{\sigma} - \sigma$. C'est un changement affine, donc licite. $\frac{y}{\sigma} = t + \sigma$ et $y = \sigma(t + \sigma)$. $dy = \sigma dt$.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big((t+\sigma)^2 - 2\sigma(t+\sigma)\Big)\Big)\sigma dt \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{1}{2}(t^2 + 2\sigma t + \sigma^2 - 2t\sigma - 2\sigma^2)\Big)\sigma dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}(t^2 - \sigma^2))dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2})dt \\
&= e^{\frac{\sigma^2}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{2})dt}_{=1}.
\end{aligned}$$