CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

E.S.C.P. – E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mardi 14 Mai 2002, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

On désigne par I, O, J et A les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. a) Écrire la matrice A comme combinaison linéaire des matrices I et J, puis la matrice J comme combinaison linéaire des matrices A et I.

b) Exprimer J^2 en fonction de J et en déduire que la matrice A vérifie l'égalité $A^2 + 5A + 4I = O$.

c) Montrer que la matrice A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} en fonction des matrices I et J.

2. a) Soit U la matrice-colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer le produit matriciel JU.

En déduire une valeur propre de la matrice J.

b) Montrer que 0 est valeur propre de J et donner une base du sous-espace propre associé.

c) La matrice J est-elle inversible ? La matrice J est-elle diagonalisable ?

3. a) Soit X une matrice-colonne non nulle à trois éléments et λ un réel vérifiant $JX = \lambda X$. Montrer qu'il existe un réel μ que l'on donnera en fonction de λ vérifiant $AX = \mu X$.

b) En déduire que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont -1 et -4.

c) Sans expliciter la matrice A^{-1}, calculer ses valeurs propres et montrer qu'elle est diagonalisable.

4. Soit a un paramètre réel et F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F_a(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer qu'il existe un unique point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera, en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de F_a sont nulles. Calculer $F_a(x_0, y_0)$.

c) Calculer, pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, le nombre : $G_a(x,y) = F_a(x,y) + \frac{1}{3}(3x - y - a)^2 + 2a^2$ et préciser son signe.

d) En déduire que la fonction F_a admet un unique extremum sur $\mathbb{R}^2$. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum et donner sa valeur notée $M(a)$.

e) Montrer que la fonction M qui, à tout réel a associe le nombre $M(a)$, admet un unique extremum que l'on précisera. Que peut-on en conclure ?

PROBLÈME

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $u * v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

Partie 1 : Exemples

1. Premiers exemples

Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

a) pour tout entier naturel n, $u_n = 2$ et $v_n = 3$.

b) pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.

c) pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ et $v_n = \dfrac{3^n}{n!}$.

2. Programmation

Dans cette question, les suites u et v sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Écrire un programme en Turbo-Pascal qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n, qui calcule et affiche les valeurs $w_0, w_1, \dots, w_n$.

3. Un résultat de convergence

Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$.

b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités :

$$w_{2n} \leqslant v_0\, u_{2n} + 2v_n + v_1\, u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1\, u_n$$

c) En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc, elle aussi, vers 0.

d) Soit b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $b * v$ est convergente et de limite nulle.

Partie 2 : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.

2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}$.

a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.

Que peut-on en déduire pour les suites $b * c$ et a ?

c) Soit ε la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = c_n - \ell$. Montrer que la suite $b * \varepsilon$ converge vers 0.

d) On désigne par d la suite $b * \varepsilon$.

Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $d_n = a_n - \frac{2}{3}\ell\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Partie 3 : Application aux variables aléatoires

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires envisagées sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Résultats préliminaires

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on désigne par S leur somme.

a) Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \mathbf{P}([X = n])$ et $v_n = \mathbf{P}([Y = n])$.
Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([S = n]) = w_n$, ($w$ étant la suite définie à partir des suites u et v en tête du problème).

b) Retrouver alors le résultat de la question **1.**c) de la **Partie 1** par un choix adéquat des lois de X et de Y.

c) Pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note 2^{-Z} la variable aléatoire prenant, pour tout entier naturel n, la valeur 2^{-n} si et seulement si l'événement $[Z = n]$ est réalisé. Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance donnée par :

$$\mathrm{E}\left(2^{-Z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}([Z = n])\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On note $r(Z)$ cette espérance.

d) Que peut-on dire des variables aléatoires 2^{-X} et 2^{-Y} ?
En déduire l'égalité : $r(S) = r(X)\,r(Y)$.

e) On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi. Pour tout entier naturel non nul q, on désigne par S_q la variable aléatoire définie par : $S_q = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} X_i$. Établir l'égalité : $r(S_q) = (r(X_1))^q$.

2. Une formule sommatoire

a) Montrer que les égalités : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([Z = n]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ définissent la loi de probabilité d'une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$. Calculer alors le nombre $r(Z)$.

b) On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi que Z et, pour tout entier naturel non nul q, on désigne encore par S_q la variable :

$$S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i$$

En admettant, pour tout entier naturel non nul q, l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_{k+q}^{q} = C_{n+q+1}^{q+1}$, montrer par récurrence que la loi de S_q est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([S_q = n]) = C_{n+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}$$

c) Pour tout entier naturel non nul q, calculer le nombre $r(S_q)$ et en déduire la relation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \left(\frac{4}{3}\right)^{q}$$

3. Un exemple concret

On admet, dans cette question, que la variable aléatoire Z définie à la question **2.a)** représente le nombre de petits devant naître en 2003 d'un couple de kangourous. Chaque petit kangourou a la même probabilité $\frac{1}{2}$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres. On note F la variable aléatoire égale au nombre de femelles devant naître en 2003.

a) Préciser, pour tout entier naturel n, la loi conditionnelle de F sachant $[Z = n]$.

b) À l'aide de la formule obtenue en **2.c**, montrer que la loi de F est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([F = n]) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

c) Justifier l'existence des espérances $\mathrm{E}(Z)$ et $\mathrm{E}(F)$ des variables aléatoires Z et F, puis vérifier l'égalité : $\mathrm{E}(Z) = 2\,\mathrm{E}(F)$.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2002

ESCP-EAP MATH III

CORRIGE

EXERCICE

QUESTION–1.

a) On a facilement $\boxed{A = J - 4I, \text{ soit } J = A + 4I}$

b) $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{J^2 = 3J.}$$

Ceci signifie que $(A + 4I)^2 = 3(A + 4I)$. **Mais A et I commutent, on peut développer $(A+4I)^2$ par le binôme de Newton.**

$(A + 4I)^2 = A^2 + 8A + 16I$ (car $AI = IA = I$ et $I^2 = I$.) On obtient donc la relation : $A^2 + 8A + 16I = 3(A + 4I) = 3A + 12I$, soit

$$\boxed{A^2 + 5A + 4I = (0).}$$

c) L'égalité précédente s'écrit aussi : $A(A+5I) = -4I$, soit encore $A\Big(-\frac{1}{4}(A+5I)\Big) = I$.

$$\boxed{\text{Ceci prouve que } A \text{ est inversible et on a : } A^{-1} = -\frac{1}{4}(A+5I).}$$

Remarque et rappel de cours. : On aurait pu - ou on aurait dû - vérifier que $\Big(-\frac{1}{4}(A+5I)\Big)A = I$ pour satisfaire à la définition de matrice inversible, à savoir : une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I$.

On peut s'en dispenser. En effet, supposons que l'on ait seulement l'égalité $AB = I$ et notons f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ associés aux matrices A et B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. L'égalité $AB = I$ équivaut à $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. **Alors g est injective ;** en effet, considérons un vecteur u du noyau de g $(g(u) = 0)$ et appliquons f à cette égalité ; il vient $f(g(u)) = f(0) = 0$ puisque f est linéaire et d'autre part $f(g(u)) = (f \circ g)(u) = u$ d'après la relation vérifiée par f et g. Il s'ensuit que $u = 0$.

Conclusion : g est injective et, puisque g est un endomorphisme de l'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension finie, on conclut que g est **bijective**. Composons alors l'égalité $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ par g^{-1} à droite, il vient $f \circ g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \circ g^{-1}$, soit $f = g^{-1}$ (ou encore $g = f^{-1}$). Ce qui prouve bien que f est bijective (puisque g^{-1} l'est). Traduisons ce résultat sur les matrices : A est inversible et $B = A^{-1}$.

Remarque : On peut aussi considérer A et B comme les matrices d'endomorphismes f et g de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ rapporté à sa base canonique. C'est ce que nous ferons dans la question suivante.

QUESTION–2.

a) Un calcul immédiat donne : $\boxed{JU = 3U.}$ Or $U \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc

$$\boxed{\text{Le réel } 3 \text{ est valeur propre de } J, \text{ le vecteur } U \text{ étant un vecteur propre associé.}}$$

b) Considérons, comme nous l'avons annoncé plus haut, que J est la matrice d'un endomorphisme j de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ rapporté à sa base canonique E_1, E_2, E_3. D'après la matrice J, on a $JE_1 = JE_2 = JE_3 = E_1 + E_2 + E_3$

où $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On déduit que $JE_1 - JE_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit $J(E_1 - E_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Par définition, la matrice colonne $E_1 - E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une colonne propre associée à la valeur propre 0. De même $J(E_1 - E_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui indique que la matrice colonne $E_1 - E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une colonne propre associée à la valeur propre 0.

Le sous-espace propre $E(0, J)$ de J associé à la valeur propre 0 contient déjà les deux vecteurs $E_1 - E_2$ et $E_1 - E_3$ qui ne sont visiblement pas colinéaires (ou non proportionnels) et forment donc une famille libre. Ceci permet d'affirmer que $\dim E(0, J) \geq 2$.

D'autre part, on a vu à la question 2–a) que 3 était valeur propre de J, donc $\dim E(3, J) \geq 1$. Or on sait que les sous-espaces propres sont en somme directe, ce qui implique que la somme de leurs dimensions est inférieure ou égale à $\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, laquelle vaut 3. On a donc l'encadrement suivant :

$$1 + 2 \leq \dim(0, J) + \dim E(3, J) \leq 3.$$

Il en résulte que : $\dim E(0, J) + \dim E(3, J) = 3$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \dim E(0, J) = 2 \text{ et } (E_1 - E_2, E_1 - E_3) \text{ en est une base.}}$$

c) La matrice J n'est pas inversible puisque 0 est valeur propre de J.

Remarque : Ce résultat était prévisible car les lignes de J sont égales, et le système dont la matrice est J n'est donc pas de Cramer (en effectuant les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ on obtient une matrice triangulaire supérieure dont deux termes diagonaux sont nuls).

On aurait pu dire aussi que les colonnes de J étaient égales, donc $j(E_1) = j(E_2) = j(E_3)$, ce qui prouve que j n'est pas injective, donc sa matrice J n'est pas inversible.

$$\boxed{\text{L'égalité } \dim E(0, J) + \dim E(3, J) = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3 \text{ prouve que } J \text{ possède deux valeurs propres } 0 \text{ et } 3, \text{ et la condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité est satisfaite : La matrice } J \text{ est diagonalisable.}}$$

Remarque : ce résultat était également prévisible puisque la matrice J est symétrique réelle (cette condition, rappelons-le, est une condition **suffisante** de diagonalisabilité).

QUESTION–3.

a) Soit $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ telle que $JX = \lambda X$. Cela signifie que λ est valeur propre de J et que X est un vecteur propre associé. Or $JX = \lambda X$ équivaut, d'après 1–a) à $(A+4I)X = \lambda X$, soit encore à :

$$AX = (\lambda - 4)X.$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \lambda \text{ est valeur propre de } J \text{ si et seulement si } \lambda - 4 \text{ est valeur propre de } A}$

b) d'après le a), **les valeurs propres de A sont** $\boxed{3 - 4 = -1 \textbf{ et } 0 - 4 = -4.}$

Toujours d'après le a), X est vecteur propre de J associé à la valeur propre λ si et seulement si X est vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda - 4$. Notons $E(-4, A)$ et $E(-1, A)$ les sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres -4 et -1. On peut, d'après ce qui précède, dire que :

$$E(-4, A) = E(0, J) = \text{vect}(E_1 - E_2, E_1 - E_3) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$E(-1, A) = E(3, J) = \text{vect}(E_1 + E_2 + E_3) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\boxed{\dim E(-4, A) + \dim E(-1, A) = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3 : A \text{ est diagonalisable.}}$$

Remarque : ce résultat était également prévisible car A est une matrice symétrique réelle.

c) Soit X une colonne propre de A associée à la valeur propre μ, on a $AX = \mu X$; cette égalité équivaut à $X = A^{-1}(\mu X) = \mu A^{-1}X$ (en effet, on passe de l'égalité $AX = \mu X$ à l'égalité $X = A^{-1}(\mu X)$ en multipliant à gauche par A^{-1} et l'on passe de l'égalité $X = A^{-1}(\mu X)$ à $AX = \mu X$ en multipliant à gauche par A). D'autre part, la matrice A est inversible ce qui équivaut à dire que 0 **n'est pas valeur propre de** A. Dans ces conditions, l'égalité $X = \mu A^{-1}X$ équivaut à $A^{-1}X = \frac{1}{\mu}X$.

> **Conclusion** : $AX = \mu X \iff A^{-1}X = \frac{1}{\mu}X$. Et puisque X n'est pas nulle, on peut énoncer : μ est valeur propre de A si et seulement si $\frac{1}{\mu}$ est valeur propre de A^{-1}.
>
> Les valeurs propres de A^{-1} sont donc $\frac{1}{-1} = -1$ et $\frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$.

Remarquons, d'après les calculs précédents que :

$X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $AX = \mu X$ équivaut à $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A^{-1}X = \frac{1}{\mu}X$. Ceci veut dire que X est vecteur propre de A associé à la valeur propre μ si et seulement si X est vecteur propre de A^{-1} associé à la valeur propre $\frac{1}{\mu}$. Si l'on note $E(\frac{1}{\mu}, A^{-1})$ le sous-espace propre de A^{-1} associé à la valeur propre $\frac{1}{\mu}$, on a :

$$X \in E(\mu, A) \Longleftrightarrow X \in E(\frac{1}{\mu}, A^{-1}).$$
$$E(-1, A^{-1}) = E(-1, A) \text{ et } E(-\frac{1}{4}, A^{-1}) = E(-4, A).$$

Or $\dim E(-4, A) + \dim E(-1, A) = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$,
donc $\dim E(-\frac{1}{4}, A^{-1}) + \dim E(-1, A^{-1}) = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$.

La matrice A^{-1} est diagonalisable.

QUESTION–4.

a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F_a(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3x + y + a \\ x - 3y + a \\ x + y - 3a \end{pmatrix}$$

$$\boxed{F_a(x, y) = -3x^2 - 3y^2 - 3a^2 + 2xy + 2ax + 2ay.}$$

F_a est de classe $\mathcal{C}^1$ car c'est un polynôme.

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial F_a}{\partial x}(x, y) = -6x + 2y + 2a \text{ et } \frac{\partial F_a}{\partial y}(x, y) = -6y + 2x + 2a.}$$

b) Le couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est donc solution du système : $\begin{cases} \dfrac{\partial F_a}{\partial x}(x_0, y_0) & = 0 \\ \dfrac{\partial F_a}{\partial y}(x_0, y_0) & = 0 \end{cases}$

Ce système équivaut successivement à :

$\begin{cases} -6x_0 + 2y_0 + 2a & = 0 \\ -6y_0 + 2x_0 + 2a & = 0 \end{cases}$ puis à $\begin{cases} -3x_0 + y_0 + a & = 0 \\ -3y_0 + x_0 + a & = 0 \end{cases}$

Effectuons $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$, il vient $\begin{cases} -3x_0 + y_0 + a & = 0 \\ 4(x_0 - y_0) & = 0 \end{cases}$

Ce qui donne immédiatement $\boxed{x_0 = y_0 = \frac{a}{2}.}$

Un calcul sans difficulté donnera : $\boxed{F_a(x_0, y_0) = F_a(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) = -2a^2.}$

c) Rappelons une formule que nous utiliserons ici : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} G_a(x, y) &= F_a(x, y) + \frac{1}{3}(3x - y - a)^2 + 2a^2 \\ &= -3x^2 - 3y^2 - 3a^2 + 2xy + 2ax + 2ay \\ &\qquad + \frac{1}{3}(9x^2 + y^2 + a^2 - 6xy - 6ax + 2ay) + 2a^2 \\ &= -\frac{8}{3}y^2 - \frac{2}{3}a^2 + \frac{8}{3}ay \\ &= -\frac{2}{3}(4y^2 - 4ay + a^2) \end{aligned}$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ G_a(x, y) = -\frac{2}{3}(2y - a)^2$;

il en résulte que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ G_a(x, y) \leq 0$.