ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2002

Option économique

MATHEMATIQUES II

Lundi 6 Mai 2002 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On désigne par N un nombre entier supérieur à 1 et par a un nombre réel strictement positif. L'objet du problème est d'étudier la rentabilité d'un investissement en fonction du taux d'intérêt ce qui conduit à l'étude dans les parties II et III des équations suivantes pour $0 < x < 1$:

$$x^N + x^{N-1} + \ldots + x^2 + x - a = 0.$$

$$Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \ldots + 2x^2 + x - a = 0.$$

Dans la partie I, on étudie la première de ces équations dans deux cas particuliers ($N = 2$ et 3).

PARTIE I

1°) Résolution numérique de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ ($0 < x < 1$)
On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une et une seule racine réelle appartenant à $]0, 1[$, et préciser la valeur de cette racine r_2.

ESSEC BUSINESS SCHOOL
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY PONTOISE CEDEX FRANCE
TEL. : 33 (0)1 34 43 30 00
FAX : 33 (0)1 34 43 31 11
WEB: WWW.ESSEC.FR

ETABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PRIVE
RECONNU PAR L'ETAT. MEMBRE DE LA FESIC

ESSEC ACTING FIRST
agir en pionnier

ESSEC BUSINESS SCHOOL
ETABLISSEMENTS PRIVES D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ASSOCIATION LOI 1901.
ACCREDITES AACSB - THE INTERNATIONAL ASSOCIATION
FOR MANAGEMENT EDUCATION
AFFILIES A LA CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE
DE VERSAILLES VAL D'OISE-YVELINES

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

b) Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à [1/2, 1], que $f(x)$ appartient à [1/2, 1].

c) Calculer la dérivée f' de f et prouver l'inégalité suivante pour $1/2 \leq x \leq 1$:

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$

d) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Prouver l'inégalité suivante et la convergence de la suite (u_n) vers r_2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

2°) Résolution numérique de l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ $(0 < x < 1)$

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

a) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle r_3 appartenant à]0, 1[.

b) Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à [1/3, 1], que $f(x)$ appartient à [1/3, 1].

c) Calculer les dérivées f' et f'' de f, et en déduire le maximum de la valeur absolue de $f'(x)$ pour x appartenant à [1/3, 1].

d) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Majorer $|u_n - r_3|$ en fonction de n et prouver la convergence de la suite (u_n) vers r_3.

PARTIE II

3°) Etude de l'équation $x^N + x^{N-1} + \ldots + x - a = 0$

On note f_N la fonction polynôme définie par : $f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \ldots + x^2 + x - a$.

a) Montrer que l'équation $f_N(x) = 0$ possède une racine strictement positive x_N et une seule, puis montrer que celle-ci appartient à]0, 1[lorsque $N > a$.

b) Montrer la relation (*) : $(x-1)f_N(x) = x^{N+1} - (a+1)x + a$.

4°) Racine positive de l'équation $x^N + x^{N-1} + \ldots + x - a = 0$

a) Montrer que $f_{N+1}(x_N) > f_N(x_N)$ et en déduire que la suite (x_N) est strictement décroissante.
En déduire que la suite (x_N) converge vers un nombre réel x^* appartenant à [0, 1[.

b) Montrer que $0 < x_N \leq x_A$, puis que $0 < (x_N)^N \leq (x_A)^N$ lorsque $N \geq A$ où A est un entier naturel non nul.
En choisissant $A \geq a$, en déduire la limite de la suite (x_N^N) lorsque N tend vers $+\infty$, puis, à l'aide de la relation (*), exprimer la limite x^* en fonction de a.

On convient alors de poser $x_N = \dfrac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)$, et ε_N tend donc vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

c) Etablir à l'aide de la relation (*) l'égalité suivante :

$$(N+1)\varepsilon_N[\ln(\frac{a}{a+1}) + \ln(1+\varepsilon_N)] = \varepsilon_N \ln(\varepsilon_N) + \varepsilon_N \ln(a).$$

En déduire les limites de $(N+1)\varepsilon_N$ et de $(1+\varepsilon_N)^{N+1}$ lorsque N tend vers $+\infty$, puis déterminer à l'aide de la relation (*) un équivalent de ε_N en fonction de a et N.

On considère un investissement qui nécessite l'apport initial d'une somme $S_0 > 0$ l'année 0, puis qui rapporte ensuite la même somme $S > 0$ pendant chacune des N années suivantes, c'est à dire pendant les années 1, 2, … , N..

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

Lorsque le taux d'intérêt des placements est supposé constant au cours du temps et égal à $r > 0$, on sait que le placement d'une somme s à l'issue de l'année 0 conduit à une somme $s_1 = (1+r)s$ à l'issue de l'année 1, … , à une somme $s_n = (1+r)^n s$ à l'issue de l'année n, …
Dans ce contexte, on obtiendra une somme S_n à l'issue de l'année n si et seulement si on obtient une somme $S_n / (1+r)^n$ à l'issue de l'année 0 (puisque le placement d'une telle somme $S_n / (1+r)^n$ conduit précisément à l'obtention de la somme S_n à l'issue de n années de placement). Aussi appellera-t-on dans ce contexte *valeur présente* de la somme S_n la somme $S_n / (1+r)^n$.

5°) Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement

a) Montrer que la valeur présente (à la fin de l'année 0) de l'investissement décrit ci-dessus est égale, compte tenu de la dépense initiale S_0 et des revenus attendus, à :

$$VP(r) = \frac{S}{(1+r)^N} + \frac{S}{(1+r)^{N-1}} + \ldots + \frac{S}{(1+r)^2} + \frac{S}{1+r} - S_0.$$

L'investissement précédent est alors réalisé si et seulement si l'inégalité $VP(r) \geq 0$ est vérifiée, c'est à dire s'il est financièrement plus intéressant de réaliser l'investissement projeté que de placer la somme S_0 au taux d'intérêt r des placements comme on l'a décrit plus haut.

b) Montrer que l'équation $VP(r) = 0$ possède une racine strictement positive r_N et une seule si $N > S_0 / S$, et donner l'expression de celle-ci en fonction de x_N et montrer que l'investissement décrit est réalisé si et seulement si $r \leq r_N$.

c) Préciser le sens de variation et la limite r^* de la suite (r_N), puis exprimer cette limite r^* en fonction de S et S_0 et préciser un équivalent de l'erreur $r^* - r_N$ faite en remplaçant r_N par r^*.

PARTIE III

6°) Etude de l'équation $Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \ldots + x - a = 0$

On note g_N la fonction polynôme définie par : $g_N(x) = Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \ldots + 2x^2 + x - a$.

a) Montrer que l'équation $g_N(x) = 0$ possède une racine strictement positive y_N et une seule, puis montrer que celle-ci appartient à $]0, 1[$ lorsque $N(N+1) > 2a$.

b) Montrer la relation (**) : $(x-1)^2 g_N(x) = Nx^{N+2} - (N+1)x^{N+1} + x - a(x-1)^2$.

7°) Racine positive de l'équation $Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \ldots + x - a = 0$

a) Montrer que $g_{N+1}(y_N) > g_N(y_N)$ et en déduire que la suite (y_N) est strictement décroissante.
En déduire que la suite (y_N) converge vers un nombre réel y^* appartenant à $[0, 1[$.

b) Montrer que $0 < Ny_N^N \leq Ny_A^N$ pour $N \geq A$ où A est un nombre entier tel que $A(A+1) > 2a$.
En déduire la limite de la suite (Ny_N^N) lorsque N tend vers $+\infty$, et, à l'aide de la relation (**), exprimer la limite y^* en fonction de a.

On modifie les hypothèses précédentes et on suppose désormais que l'investissement considéré, qui nécessite toujours l'apport initial d'une somme S_0 l'année 0, rapporte de plus en plus pendant chacune des N années suivantes, comme suit : une somme S l'année 1, une somme $2S$ l'année 2, une somme $3S$ l'année 3, … , une somme NS l'année N.

8°) Taux d'intérêt permettant la réalisation de l'investissement

a) Montrer que la valeur présente (à la fin de l'année 0) de l'investissement décrit est égale à :

$$VP(r) = \frac{NS}{(1+r)^N} + \frac{(N-1)S}{(1+r)^{N-1}} + \ldots + \frac{2S}{(1+r)^2} + \frac{S}{1+r} - S_0.$$

L'investissement précédent est alors réalisé si et seulement si l'inégalité $VP(r) \geq 0$ est vérifiée.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

b) Montrer que l'équation $VP(r) = 0$ possède une racine strictement positive r_N et une seule lorsque $N(N+1) > 2S_0 / S$, puis donner l'expression de celle-ci en fonction de y_N et montrer que l'investissement décrit est réalisé si et seulement si $r \leq r_N$.

c) Préciser le sens de variation et la limite r^* de la suite (r_N), puis exprimer cette limite r^* en fonction de S et S_0.

***

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2002

ESSEC MATH II

CORRIGE

PARTIE I

QUESTION–1.

Résolution numérique de l'équation $x^2+x-1=0$ $(0<x<1)$.

a) L'équation a pour discriminant 5, ses solutions sont $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Elles sont de signes contraires : $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}>0$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<0$. La solution positive est $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Or

$$\begin{aligned} 4<5<9 \quad &\Longrightarrow 2<\sqrt{5}<3 \quad \text{car } x\longmapsto\sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+\\ &\Longrightarrow 1<-1+\sqrt{5}<2\\ &\Longrightarrow \frac{1}{2}<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<1, \end{aligned}$$

donc $\boxed{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\in\,]0;1[,\text{ d'où } r_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}.}$

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\leq x\leq 1 \quad &\Longrightarrow \frac{3}{2}\leq x+1\leq 2\\ &\Longrightarrow \frac{1}{2}\leq\frac{1}{x+1}\leq\frac{2}{3}\leq 1. \end{aligned}$$

On a pris les inverses de nombres strictement positifs.

Donc $\boxed{\forall x\in[\frac{1}{2},1],\ \ f(x)\in[\frac{1}{2},1].}$

c) Il est immédiat que :

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \ f'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \ |f'(x)|=\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\leq x\leq 1 \quad &\Longrightarrow \frac{3}{2}\leq x+1\leq 2\\ &\Longrightarrow \frac{9}{4}\leq (x+1)^2\leq 4 \end{aligned}$$

puisqu'il s'agit d'inégalités entre nombres positifs et pour les mêmes raisons on peut prendre les inverses :

$\dfrac{1}{2}\leq x\leq 1\Longrightarrow \dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{(x+1)^2}\leq\dfrac{4}{9}$.

$$\boxed{\forall x\in[\tfrac{1}{2},1],\ \ |f'(x)|\leq\tfrac{4}{9}.}$$

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

d) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ par un raisonnement par récurrence. Notons P_n la propriété " $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ ".

Initialisation : Pour $n = 0$, la propriété est vraie car $u_0 = 1$.

Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}\ /\ P_n$ soit vraie. On a donc $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$, donc d'après la question **1 b)**, on conclut que $u_{n+1} \in [\frac{1}{2}, 1]$. La propriété est donc héréditaire.

$$\boxed{\text{D'après le principe du raisonnement par récurrence, } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\tfrac{1}{2}, 1]}$$

- D'après l'étude faite à la question **1 a)**, on sait que $r_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$.

f est dérivable sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et sur cet intervalle $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$ d'après la question **1 c)**.

On peut alors appliquer l'inégalité des accroissements finis entre les points u_n et r_2 qui, tous les deux, sont dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ |f(u_n) - f(r_2)| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2|.$ **(1)**

Or r_2 est solution de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$, soit aussi $x(x+1) = 1$, et puisque $r_2 \neq -1$, on peut écrire : $r_2 = \dfrac{1}{r_2 + 1}$: $\boxed{r_2 = f(r_2).}$

En tenant compte du fait que $f(u_n) = u_{n+1}$, l'encadrement **(1)** devient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2|. \quad \textbf{(2)}$$

- Montrons alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Notons Q_n cette propriété.

Initialisation : pour $n = 0, |u_0 - r_2| = |1 - r_2| \leq 1$ car $r_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$, donc $|1 - r_2| = 1 - r_2 \leq \frac{1}{2} \leq 1$. Or $\left(\frac{4}{9}\right)^0 = 1$, donc on a bien $|u_0 - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^0$.

Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}\ /\ Q_n$ soit vraie ; cela signifie que $|u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Multiplions cette inégalité par $\frac{4}{9} > 0$, il vient $\frac{4}{9}|u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$. Or d'après l'inégalité **(2)** $|u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2|$, donc par comparaison, on obtient

$|u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9}|u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$, soit finalement $|u_{n+1} - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$. La propriété est héréditaire.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r_2| \leq \left(\tfrac{4}{9}\right)^n .}$$

La suite $\left(\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$ est une suite **géométrique** dont la raison $\frac{4}{9}$ est **en valeur absolue strictement inférieure à** 1 ; cette suite converge donc vers 0. Par théorème d'encadrement , $0 \leq |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$, on conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - r_2| = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - r_2) = 0$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = r_2.}$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

QUESTION–2.

a) Posons, pour $x \in [0;1]$, $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$. Alors $\forall x \in [0;1]$, $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ (g est une fonction polynomiale, donc dérivable).

Il en résulte immédiatement que $\forall x \in [0;1],\ g'(x) > 0$.

La fonction g est strictement croissante sur $[0;1]$.

De plus g est continue sur $[0;1]$, puisqu'elle est dérivable.

$g(0) = -1$ et $g(1) = 2$.

La fonction g est continue, strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$; elle est donc bijective de cet intervalle sur son image qui est l'intervalle $[g(0), g(1)] = [-1, 2]$ par croissance de g. Or 0 appartient à l'intervalle image, donc il existe un réel et un seul, noté r_3 de l'intervalle $[0;1]$ tel que $g(r_3) = 0$. De plus $r_3 \neq 0$ puisque $g(0) = -1 \neq 0$ et $r_3 \neq 1$ puisque $g(1) = 2 \neq 0$.

$$\boxed{\exists\,! r_3 \in]0;1[\ /\ g(r_3) = 0, \text{ soit } r_3^3 + r_3^2 + r_3 - 1 = 0.}$$

b) $\forall x \in [\frac{1}{3};1]$, on a $\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 \leq x^2 + x + 1 \leq 3$ puisque la fonction $x \longmapsto x^2 + x + 1$ est strictement croissante sur l'intervalle $[\frac{1}{3};1]$ comme le montre facilement le signe de sa dérivée $2x + 1$. C'est-dire que l'on a $0 < \frac{13}{9} \leq x^2 + x + 1 \leq 3$. Comme il s'agit **d'inégalités entre nombres strictement positifs**, on peut prendre les inverses et l'on obtient : $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x^2 + x + 1} \leq \frac{9}{13} < 1$.

$$\boxed{\forall x \in [\tfrac{1}{3};1]\ ,\ f(x) \in [\tfrac{1}{3};1].}$$

c) Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 \neq 0$. En effet, le discriminant de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ vaut $-3 < 0$: cette équation n'a donc pas de racines réelles. La fonction f est donc une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas : elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. (on peut même dire qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.) Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{-2x - 1}{(x^2 + x + 1)^2}.}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-2(x^2 + x + 1)^2 - (-2x - 1)2(2x + 1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)^4} \\
&= \frac{-2(x^2 + x + 1)^2 + 2(2x + 1)^2(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)^4} \\
&= \frac{-2(x^2 + x + 1) + 2(2x + 1)^2}{(x^2 + x + 1)^3} \\
&= \frac{-2(x^2 + x + 1) + 2(4x^2 + 4x + 1)}{(x^2 + x + 1)^3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \frac{6x(x + 1)}{(x^2 + x + 1)^3}.}$$

- Sur $[\frac{1}{3};1]$, $f''(x) > 0$ puisque tous les termes intervenant dans $f''(x)$ sont strictement positifs. La fonction f' est strictement croissante ; dressons son tableau de variations :

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.