ESSEC

MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2002

Option économique

MATHEMATIQUES III

Jeudi 2 Mai 2002 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1 : algèbre linéaire et probabilités

Dans cet exercice, on désigne par p un nombre entier naturel non nul et par $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à p.

1°) Etude d'un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}_p[X]$

a) On associe à toute fonction polynôme P la fonction $\widehat{P}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\widehat{P}(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt \quad \text{si } x \neq 1 \qquad \text{et} \qquad \widehat{P}(1) = P(1).$$

- Montrer que la fonction $x \to \int_1^x P(t)dt$ est une fonction polynôme admettant 1 pour racine.
- Montrer que la fonction $\widehat{P}$ est une fonction polynôme de même degré que P lorsque $P \neq 0$.

b) On considère l'application ϕ associant à toute fonction polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_p[X]$ la fonction polynôme $\widehat{P}$ définie ci-dessus.
Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$. Est-il injectif ? surjectif ?

c) Déterminer les images par ϕ des fonctions polynômes $e_k : x \to x^k$ pour $0 \leq k \leq p$, puis en déduire la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$.

d) Quelles sont les valeurs propres de ϕ ? ϕ est-il diagonalisable ?

ESSEC BUSINESS SCHOOL
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY PONTOISE CEDEX FRANCE
TEL. : 33 (0)1 34 43 30 00
FAX : 33 (0)1 34 43 31 11
WEB : WWW.ESSEC.FR

ETABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PRIVE
RECONNU PAR L'ETAT. MEMBRE DE LA FESIC

ESSEC ACTING FIRST

ESSEC BUSINESS SCHOOL
ETABLISSEMENTS PRIVES D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ASSOCIATION LOI 1901.
ACCREDITES AACSB - THE INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR MANAGEMENT EDUCATION
AFFILIES A LA CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE VERSAILLES VAL D'OISE-YVELINES

2°) Etude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

a) Déterminer les fonctions propres de ϕ associée à la valeur propre 1.

b) On considère une valeur propre λ de ϕ, et une fonction polynôme propre associée P.
Montrer que, pour tout nombre réel x :

$$(1-\lambda)P(x) = \lambda(x-1)P'(x).$$

En déduire, si $\lambda \neq 1$, que 1 est nécessairement racine de P.

c) Déterminer les images par ϕ des fonctions polynômes $P_k : x \to (x-1)^k$ pour $0 \leq k \leq p$ et montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

d) On considère une fonction polynôme P exprimée comme suit dans la base précédente :

$$P = a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots + a_p P_p.$$

Montrer que $a_0 = P(1)$, calculer $\Phi_1 = \phi(P)$, $\Phi_2 = \phi \circ \phi(P)$, puis $\Phi_n = \phi^n(P)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer pour tout nombre réel x la limite de $\Phi_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$, et en déduire en particulier que, si $P(x) = x^p$, la limite de $\Phi_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$ est égale à 1.

3°) Application à une marche aléatoire

Un individu se déplace sur les points d'abscisse 0, 1, 2, … , p selon les règles suivantes :

- Il est au point d'abscisse p à l'instant 0.
- S'il est au point d'abscisse k ($0 \leq k \leq p$) à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), il est de façon équiprobable en l'un des $k+1$ points d'abscisses 0, 1, … , k à l'instant $n+1$.

Pour tout nombre entier naturel n, on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant l'abscisse du point où se trouve l'individu à l'instant n et par EX_n son espérance.

a) Exprimer à l'aide du théorème des probabilités totales la probabilité $P(X_{n+1} = k)$ où $0 \leq k \leq p$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0), P(X_n = 1), \dots, P(X_n = p)$.

b) En déduire une matrice carrée M telle que $U_{n+1} = MU_n$ où U_n désigne la matrice-colonne dont les éléments sont du haut vers le bas $P(X_n = 0), P(X_n = 1), \dots, P(X_n = p)$.

c) Exprimer le produit matriciel $[0\ \ 1\ \ 2\ \ \dots\ \ p]M$ en fonction de $[0\ \ 1\ \ 2\ \ \dots\ \ p]$.
En multipliant l'égalité $U_{n+1} = MU_n$ à gauche par la matrice-ligne $[0\ \ 1\ \ 2\ \ \dots\ \ p]$, exprimer EX_{n+1} en fonction de EX_n, puis préciser EX_n en fonction de n ainsi que sa limite.

d) Préciser U_0, puis donner U_n en fonction de M et de n.
En déduire, à l'aide de la question 2.d que les $p+1$ composantes de U_n ont pour limites (de haut en bas) 1, 0, 0, … , 0 quand n tend vers $+\infty$, puis interpréter ce résultat.

EXERCICE 2 : probabilités et simulation informatique

On considère une suite de lancers successifs (supposés indépendants) d'une pièce de monnaie, pour laquelle la probabilité d'apparition de pile , noté P, est p et celle de face, noté F, est q, avec $0 < p < 1$ et $p + q = 1$, et on s'intéresse à l'apparition de deux piles consécutifs.
Par exemple, si l'on considère les seize premiers lancers suivants :

F	P	P	F	P	P	P	F	P	F	P	P	P	P	P	F
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

deux piles consécutifs sont réalisés aux rangs 3, 6, 12 et 14, mais non aux rangs 7, 13 et 15 (car un pile ne peut pas participer à la réalisation de deux piles consécutifs plus d'une fois).

On notera, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'événement : « deux piles consécutifs sont réalisés au rang n ».
- B_n l'événement : « deux piles consécutifs sont pour la première fois réalisés au rang n ».

Enfin, on désigne par a_n et b_n les probabilités de ces événements A_n et B_n.

1°) Calcul des probabilités a_n

a) On a bien sûr $a_1 = 0$. Calculer de plus a_2, a_3, a_4.

b) Démontrer, pour tout nombre entier naturel n non nul : $a_{n+2} = p^2 a_n + qp^2$.

c) On pose, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = a_n - c$ où c vérifie $c = p^2 c + qp^2$.

* Démontrer que (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

* En déduire, pour tout nombre entier naturel n : $a_n = \frac{p}{1+p}[p+(-p)^n]$.

2°) Nombre moyen de réalisations de deux piles consécutifs en n lancers

Pour tout entier naturel n non nul , on note X_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque l'événement A_n est réalisé, et 0 sinon.

a) Préciser la loi de X_n et son espérance.

b) Que peut-on dire de la variable aléatoire $X_n X_{n+1}$?

c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_n X_{n+2}$.

d) Déterminer pour tout nombre entier $k \geq 1$ la loi de la variable aléatoire X_{n+k} conditionnée par l'événement $X_n = 1$, c'est à dire les probabilités $P(X_{n+k} = 0 / X_n = 1)$ et $P(X_{n+k} = 1 / X_n = 1)$.

e) Interpréter la variable aléatoire $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
Donner un équivalent du nombre moyen m_n de réalisations de deux piles consécutifs parmi n lancers lorsque n tend vers $+\infty$.

3°) Calcul récursif des probabilités b_n

a) Justifier l'égalité : $P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_n \cap B_k)$.

b) Soit k un nombre entier tel que $1 \leq k \leq n$. Que vaut $P(A_n / B_k)$?

c) En déduire la formule suivante pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$a_n = b_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k a_{n-k}$$

(et ce dernier "sigma" est supposé nul pour $n = 1$). Calculer ainsi b_2, b_3, b_4, b_5.

4°) Simulation informatique dans le cas particulier $p = 2/3$

On peut alors établir à l'aide de la formule précédente (ce qu'on ne demande pas de faire) que :

$$\forall n \geq 1, \quad b_n = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

a) Montrer que l'application T associant à toute suite de lancers successifs le numéro du jet où l'on obtient pour la première fois un double pile est une variable aléatoire.

b) Déterminer l'espérance $E(T)$ de cette variable aléatoire T.

c) Le programme **Pascal** au verso dans lequel on code Pile par 1 et Face par 0 fournit (dans le cas $p = 2/3$) une simulation de l'expérience aléatoire précédente.
On signale de plus que :

- `random(3)` fournit un nombre entier aléatoire parmi 0, 1, 2.
- les lignes d'instruction notées ++++++ sont volontairement incomplètes.

```
program ESSEC2002;
var  n,k:integer;
     m:real;

function lancer:integer;
 var z:integer;
 begin
   if random(3)=0 then z:=0
                  else z:=1;
   lancer:=z;
 end;

function attente:integer;
 var x,y,k:integer;
 begin
   x:=lancer;
   y:=lancer;
   k:=2;
   while x*y = 0 do
     begin
       ++++++++++
       ++++++++++
       ++++++++++ ;
     end;
   attente:=k;
 end;
begin
 randomize;
write('Nombre de simulations : n = ');
readln(n);
 m:=0;
 for k:=1 to n do ++++++++++ ;
m:=m/n;
 write('Moyenne : ',m:0:2);
end.
```

a) On considère l'instruction **`y:=lancer;`**
Quelle est la probabilité que la variable **`y`** contienne 1 ?

b) Compléter la boucle **`while`** de la fonction **`attente`** de façon que cette fonction retourne le rang d'apparition du premier double pile.

c) Compléter la boucle **`for`** du programme principal de façon que le programme **`ESSEC 2002`** affiche la moyenne du rang d'apparition du premier double pile sur n expériences, le nombre entier naturel non nul n étant fourni par l'utilisateur.
Pour de grandes valeurs de n, autour de quelle valeur fluctue le contenu de la variable **`m`** ?

d) Réécrire la fonction **`attente`** pour que le programme **`ESSEC2002`** affiche la moyenne du rang d'apparition du premier triple pile.

***

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2002

ESSEC MATH III

CORRIGE

ESSEC III

EXERCICE I : Algèbre linéaire et probabilités

1) Etude d'un endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_p[X]$.

a).

- L'application $x \longmapsto \displaystyle\int_1^x P(t)dt$ est **la primitive de P qui s'annule pour $x=1$.**

Comme P est un polynôme, on sait que toutes ses primitives sont des polynômes, donc celle-ci aussi.

- Soit P un polynôme non nul. Si l'on note $P(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_j t^j$ $(0 \leq k \leq p)$, alors une

primitive de P est Q tel que $Q(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{j+1} t^{j+1}$; il en résulte que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_1^x P(t)dt = Q(x) - Q(1)$.

Ce polynôme $x \longmapsto Q(x) - Q(1)$ est divisible par $(x-1)$, donc il existe un polynôme T tel que $Q(x) - Q(1) = (x-1)T(x)$ **(i)**.

Or $\deg(Q) = \deg(P) + 1$; $\deg(Q) = \deg(T) + 1$ d'après **(i)** , donc $\boxed{\deg(T) = \deg(P)}$

Finalement $\forall x \neq 1$, $\widehat{P}(x) = \dfrac{Q(x) - Q(1)}{x-1} = T(x)$.

Donc $\widehat{P} = T$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$; ces deux polynômes coïncident sur $\mathbb{R} - \{1\}$, donc ils coïncident partout.

$$\boxed{\text{Pour tout polynôme } P \neq 0,\ \widehat{P} \text{ est un polynôme de même degré}}$$

b).

$*$ Si $P = 0$, il est clair que $\widehat{P} = 0$. Soit maintenant deux polynômes P et P_1 non nuls, un réel λ et x un réel distinct de 1. Compte tenu du résultat précédent : $\forall P \in \mathbb{R}_p[X]$, $\Phi(P) \in \mathbb{R}_p[X]$.

$$\begin{aligned}
(\widehat{P+\lambda P_1})(x) &= \frac{1}{x-1}\int_1^x \Big(P(t) + \lambda P_1(t)\Big)dt \\
&= \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt + \lambda \frac{1}{x-1}\int_1^x P_1(t)dt \\
&= \widehat{P}(x) + \lambda \widehat{P_1}(x) = (\widehat{P} + \lambda \widehat{P_1})(x).
\end{aligned}$$

Donc $\widehat{P} + \lambda \widehat{P_1} = (\widehat{P+\lambda P_1})$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$. De plus $(\widehat{P} + \lambda \widehat{P_1})(1) = \widehat{P}(1) + \lambda \widehat{P_1}(1) = P(1) + \lambda P_1(1) = (P + \lambda P_1)(1) = (\widehat{P+\lambda P_1})(1)$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall x\in\mathbb{R},\ (\widehat{P+\lambda P_1})(x)=(\widehat{P}+\lambda\widehat{P_1})(x),\text{ donc }\widehat{P+\lambda P_1}=(\widehat{P}+\lambda\widehat{P_1})\\ \text{ou encore }\Phi(P+\lambda P_1)=\Phi(P)+\lambda\Phi(P_1).\text{ Conclusion : }\Phi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_p[X]).\end{array}}$$

- Déterminons $\operatorname{Ker}\Phi$:

On sait que $P\neq 0\Longrightarrow \deg\Phi(P)=\deg P$, donc $\Phi(P)\neq 0$. Le seul polynôme du noyau de Φ est donc le polynôme nul : $\boxed{\operatorname{Ker}\Phi=\{0\}\text{ : }\Phi\text{ est injective}}$

De plus, Φ est un endomorphisme d'un espace de dimension $p+1$, donc

$$\boxed{\text{c'est un automorphisme de }\mathbb{R}_p[X].}$$

Remarque : On aurait pu dire - mais cela aurait été plus long : l'image par Φ de la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$ est un système de $p+1$ polynômes non nuls de degrés $0,\ 1,\ \dots,\ p$ (on dit aussi de degrés échelonnés) ; ces $p+1$ vecteurs forment un système libre dans un espace de dimension $p+1$, par conséquent, ils en forment une base : **Φ transforme une base de $\mathbb{R}_p[X]$ en une base de $\mathbb{R}_p[X]$, c'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.**

c).

Pour tout $x\neq 1$,

$$\begin{aligned}\Phi(e_k)(x)&=\frac{1}{x-1}\int_1^x t^k dt=\frac{1}{x-1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_1^x\\ &=\frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}-1}{x-1}=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}x^j\end{aligned}$$

On aura reconnu la somme des $k+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $x\neq 1$. Remarquons que cette égalité est valable aussi pour $x=1$; elle donne $\Phi(e_k)(1)=e_k(1)=1^k=1=\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{k}1=\dfrac{k+1}{k+1}$, car d'après la définition de Φ, $\Phi(P)(1)=\widehat{P}(1)=P(1)$.

$$\boxed{\forall k\in[\![0;p]\!],\ \Phi(e_k)=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}e_j.}$$

Notons A la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$:

$$A=\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac13&\dots&\frac{1}{k+1}&\dots&\frac{1}{p+1}\\ 0&\frac12&\frac13&\dots&\frac{1}{k+1}&\dots&\frac{1}{p+1}\\ 0&0&\frac13&\dots&\frac{1}{k+1}&\dots&\frac{1}{p+1}\\ \vdots&&\ddots&\ddots&\vdots&&\vdots\\ \vdots&&&\ddots&\frac{1}{k+1}&&\vdots\\ \vdots&&&&\ddots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&\dots&\dots&\dots&0&\frac{1}{p+1}\end{pmatrix}$$

Dans la colonne numéro $k+1$, se trouvent les coordonnées de $\Phi(e_k)$, soit

$$(\frac{1}{k+1},\dots,\underbrace{\frac{1}{k+1}}_{k+1\,^{\text{ème}}\text{rang}},0\dots,0)$$