



**ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES**

**CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES**

**OPTION ECONOMIQUE**

**MATHEMATIQUES III**

Jeudi 16 Mai 2002, de 14 h. à 18 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

**EXERCICE I**

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle  $AM = MB$ , d'inconnue  $M$ , dans l'espace vectoriel  $E$  des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On rappelle que si  $U_1, U_2, U_3, U_4$  sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$  est une base de  $E$ , qui est donc de dimension 4.

Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $E$ , l'ensemble des matrices  $M$  de  $E$  vérifiant  $AM = MB$  est noté  $V_{A,B}$ .

1. Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $E$  et  $\varphi_{A,B}$  l'application qui, à toute matrice  $M$  de  $E$ , associe la matrice  $AM - MB$ .

a) Montrer que  $\varphi_{A,B}$  est un endomorphisme de  $E$  et en déduire que  $V_{A,B}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

b) Dans le cas particulier où  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente  $\varphi_{A,B}$  dans la base  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$ .

Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble  $V_{A,B}$ .

2. Dans cette question,  $r$  et  $s$  désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Soit  $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  une matrice quelconque de  $E$ . Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur  $x, y, z, t$  pour que  $M$  appartienne à  $V_{D,\Delta}$ .

b) En déduire une base de  $V_{D,\Delta}$ .

3. Soit  $a, b, c, d$  des réels non nuls vérifiant  $a - b \neq c - d$ ,  $a - b \neq 1$ ,  $c - d \neq 1$ ,  $A$  et  $B$  les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 - a \\ b & 1 - b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & 1 - c \\ d & 1 - d \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que les valeurs propres de  $A$  sont 1 et  $a - b$ . En déduire qu'il existe une matrice inversible  $P$  de  $E$ , et une matrice  $D$  égale à celle de la question 2. pour une valeur convenable de  $r$ , telles que l'on ait :  $D = P^{-1}AP$ .
- b) Justifier de même l'existence d'une matrice inversible  $Q$  de  $E$ , et d'une matrice  $\Delta$  égale à celle de la question 2. pour une valeur convenable de  $s$ , telles que l'on ait :  $\Delta = Q^{-1}BQ$ .
- c) Pour toute matrice  $M$  de  $E$ , montrer qu'elle appartient à  $V_{A,B}$  si et seulement si la matrice  $P^{-1}MQ$  appartient à  $V_{D,\Delta}$ . En déduire une base de  $V_{A,B}$ .
4. Dans cette question  $r, s$  et  $u, v$  désignent quatre réels vérifiant  $r \neq s$ ,  $r \neq v$ ,  $u \neq s$ ,  $u \neq v$ , et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

- a) Par une méthode analogue à celle de la question 2., déterminer  $V_{D,\Delta}$ .
- b) En déduire, par une méthode analogue à celle de la question 3., le sous-espace vectoriel  $V_{A,B}$  dans le cas où  $A$  et  $B$  sont deux matrices diagonalisables n'ayant aucune valeur propre commune.

## EXERCICE II

Cet exercice met en évidence le fait que l'existence d'une espérance finie, pour une variable aléatoire, n'est pas toujours intuitive.

Dans tout l'exercice,  $I$  désigne l'intervalle réel  $[1, +\infty[$  et on suppose que toutes les variables aléatoires envisagées sont définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ .

### A . Première approche

1. Montrer que l'application  $g$  définie par :  $\begin{cases} g(t) = \frac{1}{t^2} & \text{si } t \in I \\ g(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est une densité de probabilité.
2. Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $I$  admettant  $g$  pour densité. Déterminer, pour tout réel  $t$ , la probabilité  $\mathbf{P}([X \leq t])$  et montrer que  $X$  n'admet pas d'espérance.
3. Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $I$  admettant  $g$  pour densité et telles que, pour tout réel  $t$ , les événements  $[X \leq t]$  et  $[Y \leq t]$  sont indépendants. On définit alors deux variables aléatoires  $U$  et  $V$  par :  $U = \min(X, Y)$  et  $V = \max(X, Y)$ , c'est-à-dire que, pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ ,  $U(\omega)$  est le plus petit des nombres  $X(\omega)$  et  $Y(\omega)$ , tandis que  $V(\omega)$  est le plus grand de ces nombres.
- a) Pour tout réel  $t$ , exprimer l'événement  $[V \leq t]$  à l'aide des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ ; en déduire la probabilité  $\mathbf{P}([V \leq t])$ .
- b) Montrer que la variable aléatoire  $V$  admet pour densité l'application  $h$  définie par :

$$\begin{cases} h(t) = \frac{2(t-1)}{t^3} & \text{si } t \in I \\ h(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- c) De façon analogue, calculer pour tout réel  $t$  la probabilité  $\mathbf{P}([U > t])$  et en déduire que la variable aléatoire  $U$  admet pour densité l'application  $m$  définie par :

$$\begin{cases} m(t) = \frac{2}{t^3} & \text{si } t \in I \\ m(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- d) Montrer que  $V$  n'admet pas d'espérance et que  $U$  admet une espérance que l'on calculera.

## B . Situation plus générale

Dans cette partie,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on suppose que  $n$  visiteurs, numérotés de 1 à  $n$ , se rendent aléatoirement dans un musée et que, pour tout entier de l'intervalle  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , l'heure d'arrivée du visiteur numéro  $k$  est une variable aléatoire  $X_k$  admettant pour densité l'application  $g$  définie dans la partie A..

On suppose de plus que, pour tout réel  $t$ , les événements  $[X_1 \leq t]$ ,  $[X_2 \leq t]$ ,  $\dots$ ,  $[X_n \leq t]$  sont mutuellement indépendants.

Si  $r$  est un entier de l'intervalle  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $T_r$  la variable aléatoire désignant l'heure d'arrivée du  $r$ -ième arrivant.

La partie A. traite donc du cas  $n = 2$ , les variables aléatoires  $U$  et  $V$  étant respectivement égales à  $T_1$  et  $T_2$ .

1. Soit  $t$  un élément de  $I$  fixé. Pour tout entier  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $B_k$  la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque l'événement  $[X_k \leq t]$  est réalisé et la valeur 0 sinon.

a) Préciser, en la justifiant soigneusement, la loi de la variable aléatoire  $Z$  définie par :

$$Z = B_1 + \dots + B_n$$

b) Pour tout entier  $r$  de l'intervalle  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , exprimer l'événement  $[T_r \leq t]$  à l'aide de la variable aléatoire  $Z$  et en déduire l'égalité :  $P([T_r \leq t]) = \sum_{k=r}^n C_n^k \left(1 - \frac{1}{t}\right)^k \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k}$ .

2. a) Vérifier, pour tout entier  $k$  de l'intervalle  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , l'égalité :  $kC_n^k - (n+1-k)C_n^{k-1} = 0$ .

b) En déduire que, pour tout entier  $r$  de l'intervalle  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , la variable aléatoire  $T_r$  admet pour densité l'application  $f_r$  définie par :

$$\begin{cases} f_r(t) = rC_n^r \left(\frac{1}{t}\right)^{n+2-r} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{r-1} & \text{si } t \in I \\ f_r(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Donner un équivalent à  $tf_r(t)$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$  et en déduire que les variables aléatoires  $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$  admettent une espérance alors que  $T_n$  n'en admet pas.

3. Pour tout couple  $(p, q)$  d'entiers naturels, on pose :  $J(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$ .

a) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout couple  $(p, q)$  d'entiers naturels, la relation :

$$(p+1)J(p, q+1) = (q+1)J(p+1, q)$$

b) Calculer, pour tout entier naturel  $q$ , l'intégrale  $J(0, q)$ .

c) Montrer par récurrence sur  $p$  que, pour tout couple d'entiers naturels  $(p, q)$ , on a :

$$J(p, q) = \frac{p! q!}{(1+p+q)!}$$

4. Soit  $r$  un entier de l'intervalle  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

a) Si  $a$  est un réel strictement supérieur à 1, transformer en effectuant le changement de variable  $x = \frac{1}{t}$  l'intégrale  $\int_1^a t f_r(t) dt$ .

b) En déduire la valeur de l'espérance de la variable aléatoire  $T_r$  en fonction de  $n$  et de  $r$ .



## ANNALES DE MATHEMATIQUES 2002

HEC III

CORRIGE

## EXERCICE-I

## QUESTION-1.

a) La multiplication des matrices de  $E$  étant interne dans  $E$ , les matrices  $AM$  et  $MB$  sont dans  $E$ . La soustraction étant elle aussi interne dans  $E$ , la matrice  $AM - MB$  est dans  $E$ .

$\varphi_{A,B}$  est une application de  $E$  dans  $E$ .

Soit  $(M, N) \in E^2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\varphi_{A,B}(\alpha M + N) &= A(\alpha M + N) - (\alpha M + N)B \\ &= \alpha AM + AN - \alpha MB - NB \\ &= \alpha(AM - MB) + (AN - NB) \\ &= \alpha\varphi_{A,B}(M) + \varphi_{A,B}(N).\end{aligned}$$

L'application  $\varphi_{A,B}$  est un endomorphisme de  $E$ .

- $M \in V_{A,B} \iff AM = MB$   
 $\iff AM - MB = (0)$   
 $\iff \varphi_{A,B}(M) = (0)$ .

$V_{A,B} = \text{Ker } \varphi_{A,B}$ , donc  $V_{A,B}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

b)

$$\begin{aligned}AU_1 - U_1B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\varphi_{A,B}(U_1) = 2U_1 - U_3.$$

$$\begin{aligned}AU_2 - U_2B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\varphi_{A,B}(U_2) = -2U_1 - U_4.$$

$$\begin{aligned}
 AU_3 - U_3B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\varphi_{A,B}(U_3) = -U_1 + 2U_3.$$

$$\begin{aligned}
 AU_4 - U_4B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\varphi_{A,B}(U_4) = -U_2 - 2U_3$$

Notons  $U_{A,B}$  la matrice de  $\varphi_{A,B}$  dans la base  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$  de  $E$ . **Par définition de la matrice d'un endomorphisme**, on obtient  $U_{A,B}$  en mettant en colonnes les coordonnées de  $\varphi_{A,B}(U_1), \varphi_{A,B}(U_2), \varphi_{A,B}(U_3), \varphi_{A,B}(U_4)$  dans la base  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$ . On obtient donc

$$U_{A,B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Effectuons sur les lignes de  $U_{A,B}$  les opérations suivantes :

$L_1 \leftrightarrow L_3$ ,  $L_2 \leftrightarrow L_4$ , puis  $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ , puis  $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ . On obtient successivement les matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est triangulaire supérieure, aucun des termes de la diagonale n'est nul, **elle est donc inversible et  $U_{A,B}$  aussi.  $\varphi_{A,B}$  est donc un automorphisme de  $E$**

$$\text{De ce fait, } V_{A,B} = \text{Ker } \varphi_{A,B} \text{ est réduit à } \{0_E\}.$$

## QUESTION-2.

a) Soit  $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E$ .

$$\begin{aligned}
 M \in V_{D,\Delta} &\iff DM - M\Delta = (0) \\
 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = (0) \\
 &\iff \begin{pmatrix} x & y \\ rz & rt \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & sy \\ z & ts \end{pmatrix} = (0) \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & y(1-s) \\ z(r-1) & (r-s)t \end{pmatrix} = (0).
 \end{aligned}$$

Cette égalité matricielle équivaut elle-même au système :  $\begin{cases} y(1-s) = 0 \\ z(r-1) = 0 \\ (r-s)t = 0 \end{cases}$

C'est-à-dire  $y = z = t = 0$  puisque  $s \neq 1$  et  $r \neq 1$  et  $r \neq s$ .

$$V_{D,\Delta} = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

b)

$$V_{D,\Delta} = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \boxed{\text{vect}(U_1)}.$$

**QUESTION-3.**

a) Rappelons que les matrices de  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  peuvent être considérées comme matrices des endomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  muni de sa base canonique. Comme  $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ , les matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ne peuvent pas avoir plus de deux valeurs propres distinctes. **Les réels 1 et  $a-b$  étant distincts, si nous vérifions que ces deux nombres sont valeurs propres de  $A$ , on pourra conclure que 1 et  $a-b$  sont les valeurs propres de  $A$ .**

- Montrons qu'il existe un couple  $(x, y) \neq (0, 0)$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\begin{cases} ax + (1-a)y = x \\ bx + (1-b)y = y \end{cases} ; \begin{cases} (a-1)x + (1-a)y = 0 \\ bx - by = 0 \end{cases} ; \begin{cases} (a-1)(x-y) = 0 \\ b(x-y) = 0 \end{cases}$$

Effectuons alors l'opération  $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ , cela donne le système équivalent :

$$\begin{cases} (a-b-1)(x-y) = 0 \\ b(x-y) = 0 \end{cases}$$

Or, par hypothèse,  $a-b \neq 1$ , donc  $a-b-1 \neq 0$  et la première équation équivaut à  $x=y$  et cette solution vérifie aussi la deuxième équation.

**En conclusion :** le réel 1 est valeur propre de  $A$ , puisque l'équation  $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  admet pour solutions tous les couples  $(x, x)$  avec  $x \in \mathbb{R}$ .

Par suite,

$$E_1(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- De la même façon,  $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  équivaut au système :

$$\begin{cases} ax + (1-a)y = (a-b)x \\ bx + (1-b)y = (a-b)y \end{cases} \quad \text{lui même équivaut à :}$$

$$bx + (1-a)y = 0, \text{ soit aussi à } x = \frac{a-1}{b}y \text{ puisque } b \neq 0.$$

**En conclusion :** le réel  $a-b$  est valeur propre de  $A$ , puisque l'équation

$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  admet pour solutions tous les couples  $(\frac{a-b}{b}y, y)$  avec  $y \in \mathbb{R}$ . Par suite,

$$E_{a-b}(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} \frac{a-1}{b} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix} \right).$$

Enfin, la matrice  $A$  possède effectivement deux valeurs propres distinctes 1 et  $a-b$  ; la condition suffisante de diagonalisation est satisfaite.