CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Jeudi 16 Mai 2002, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue M, dans l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E, qui est donc de dimension 4.

Si A et B sont deux matrices de E, l'ensemble des matrices M de E vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

1. Soit A et B deux matrices de E et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de E, associe la matrice $AM - MB$.

a) Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4).
Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.

2. Dans cette question, r et s désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de E. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z, t pour que M appartienne à $V_{D,\Delta}$.

b) En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

3. Soit a, b, c, d des réels non nuls vérifiant $a-b \neq c-d$, $a-b \neq 1$, $c-d \neq 1$, A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

a) Montrer que les valeurs propres de A sont 1 et $a-b$. En déduire qu'il existe une matrice inversible P de E, et une matrice D égale à celle de la question **2.** pour une valeur convenable de r, telles que l'on ait : $D = P^{-1}AP$.

b) Justifier de même l'existence d'une matrice inversible Q de E, et d'une matrice Δ égale à celle de la question **2.** pour une valeur convenable de s, telles que l'on ait : $\Delta = Q^{-1}BQ$.

c) Pour toute matrice M de E, montrer qu'elle appartient à $V_{A,B}$ si et seulement si la matrice $P^{-1}MQ$ appartient à $V_{D,\Delta}$. En déduire une base de $V_{A,B}$.

4. Dans cette question r, s et u, v désignent quatre réels vérifiant $r \neq s$, $r \neq v$, $u \neq s$, $u \neq v$, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

a) Par une méthode analogue à celle de la question **2.**, déterminer $V_{D,\Delta}$.

b) En déduire, par une méthode analogue à celle de la question **3.**, le sous-espace vectoriel $V_{A,B}$ dans le cas où A et B sont deux matrices diagonalisables n'ayant aucune valeur propre commune.

EXERCICE II

Cet exercice met en évidence le fait que l'existence d'une espérance finie, pour une variable aléatoire, n'est pas toujours intuitive.

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle réel $[1, +\infty[$ et on suppose que toutes les variables aléatoires envisagées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

A . Première approche

1. Montrer que l'application g définie par : $\begin{cases} g(t) = \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t \in I \\ g(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I admettant g pour densité. Déterminer, pour tout réel t, la probabilité $\mathbf{P}([X \leqslant t])$ et montrer que X n'admet pas d'espérance.

3. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans I admettant g pour densité et telles que, pour tout réel t, les événements $[X \leqslant t]$ et $[Y \leqslant t]$ sont indépendants. On définit alors deux variables aléatoires U et V par : $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, $U(\omega)$ est le plus petit des nombres $X(\omega)$ et $Y(\omega)$, tandis que $V(\omega)$ est le plus grand de ces nombres.

a) Pour tout réel t, exprimer l'événement $[V \leqslant t]$ à l'aide des variables aléatoires X et Y ; en déduire la probabilité $\mathbf{P}([V \leqslant t])$.

b) Montrer que la variable aléatoire V admet pour densité l'application h définie par :

$$\begin{cases} h(t) = \dfrac{2(t-1)}{t^3} & \text{si } t \in I \\ h(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) De façon analogue, calculer pour tout réel t la probabilité $\mathbf{P}([U > t])$ et en déduire que la variable aléatoire U admet pour densité l'application m définie par :

$$\begin{cases} m(t) = \dfrac{2}{t^3} & \text{si } t \in I \\ m(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d) Montrer que V n'admet pas d'espérance et que U admet une espérance que l'on calculera.

B . Situation plus générale

Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on suppose que n visiteurs, numérotés de 1 à n, se rendent aléatoirement dans un musée et que, pour tout entier de l'intervalle $[\![1,n]\!]$, l'heure d'arrivée du visiteur numéro k est une variable aléatoire X_k admettant pour densité l'application g définie dans la partie A..

On suppose de plus que, pour tout réel t, les événements $[X_1 \leqslant t]$, $[X_2 \leqslant t]$, ... , $[X_n \leqslant t]$ sont mutuellement indépendants.

Si r est un entier de l'intervalle $[\![1,n]\!]$, on note T_r la variable aléatoire désignant l'heure d'arrivée du r-ième arrivant.

La partie A. traite donc du cas $n = 2$, les variables aléatoires U et V étant respectivement égales à T_1 et T_2.

1. Soit t un élément de I fixé. Pour tout entier k de $[\![1,n]\!]$, on note B_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque l'événement $[X_k \leqslant t]$ est réalisé et la valeur 0 sinon.

a) Préciser, en la justifiant soigneusement, la loi de la variable aléatoire Z définie par :
$$Z = B_1 + \ldots + B_n$$

b) Pour tout entier r de l'intervalle $[\![1,n]\!]$, exprimer l'événement $[T_r \leqslant t]$ à l'aide de la variable aléatoire Z et en déduire l'égalité : $\mathrm{P}([T_r \leqslant t]) = \displaystyle\sum_{k=r}^{n} C_n^k \left(1 - \frac{1}{t}\right)^k \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k}$.

2. a) Vérifier, pour tout entier k de l'intervalle $[\![1,n]\!]$, l'égalité : $kC_n^k - (n+1-k)C_n^{k-1} = 0$.

b) En déduire que, pour tout entier r de l'intervalle $[\![1,n]\!]$, la variable aléatoire T_r admet pour densité l'application f_r définie par :
$$\begin{cases} f_r(t) = \quad rC_n^r \left(\dfrac{1}{t}\right)^{n+2-r} \left(1 - \dfrac{1}{t}\right)^{r-1} & \text{si } t \in I \\ f_r(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Donner un équivalent à $tf_r(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et en déduire que les variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ admettent une espérance alors que T_n n'en admet pas.

3. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose : $J(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p (1-x)^q \, \mathrm{d}x$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, la relation :
$$(p+1)\, J(p, q+1) = (q+1)\, J(p+1, q)$$

b) Calculer, pour tout entier naturel q, l'intégrale $J(0,q)$.

c) Montrer par récurrence sur p que, pour tout couple d'entiers naturels (p,q), on a :
$$J(p,q) = \frac{p!\, q!}{(1+p+q)!}$$

4. Soit r un entier de l'intervalle $[\![1, n-1]\!]$.

a) Si a est un réel strictement supérieur à 1, transformer en effectuant le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^a t\, f_r(t)\, \mathrm{d}t$.

b) En déduire la valeur de l'espérance de la variable aléatoire T_r en fonction de n et de r.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2002

HEC III

CORRIGE

EXERCICE–I

QUESTION–1.

a) La multiplication des matrices de E étant interne dans E, les matrices AM et MB sont dans E. La soustraction étant elle aussi interne dans E, la matrice $AM - MB$ est dans E.

$\varphi_{A,B}$ est une application de E dans E.

Soit $(M, N) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi_{A,B}(\alpha M + N) &= A(\alpha M + N) - (\alpha M + N)B \\ &= \alpha AM + AN - \alpha MB - NB \\ &= \alpha(AM - MB) + (AN - NB) \\ &= \alpha \varphi_{A,B}(M) + \varphi_{A,B}(N). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application } \varphi_{A,B} \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

- $$\begin{aligned} M \in V_{A,B} &\iff AM = MB \\ &\iff AM - MB = (0) \\ &\iff \varphi_{A,B}(M) = (0). \end{aligned}$$

$$\boxed{V_{A,B} = \operatorname{Ker} \varphi_{A,B}, \text{ donc } V_{A,B} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

b)

$$\begin{aligned} AU_1 - U_1B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi_{A,B}(U_1) = 2U_1 - U_3.}$$

$$\begin{aligned} AU_2 - U_2B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi_{A,B}(U_2) = -2U_1 - U_4.}$$

$$\begin{aligned}
AU_3 - U_3B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi_{A,B}(U_3) = -U_1 + 2U_3.}$$

$$\begin{aligned}
AU_4 - U_4B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi_{A,B}(U_4) = -U_2 - 2U_3}$$

Notons $U_{A,B}$ la matrice de $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4) de E. **Par définition de la matrice d'un endomorphisme**, on obtient $U_{A,B}$ en mettant en colonnes les coordonnées de $\varphi_{A,B}(U_1), \varphi_{A,B}(U_2), \varphi_{A,B}(U_3), \varphi_{A,B}(U_4)$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4). On obtient donc

$$U_{A,B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Effectuons sur les lignes de $U_{A,B}$ les opérations suivantes :

$L_1 \longleftrightarrow L_3$, $L_2 \longleftrightarrow L_4$, puis $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1$, puis $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$. On obtient successivement les matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est triangulaire supérieure, aucun des termes de la diagonale n'est nul, **elle est donc inversible et $U_{A,B}$ aussi. $\varphi_{A,B}$ est donc un automorphisme de E**

$$\boxed{\text{De ce fait, } V_{A,B} = \operatorname{Ker}\varphi_{A,B} \text{ est réduit à } \{0_E\}.}$$

QUESTION–2.

a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E$.

$$\begin{aligned}
M \in V_{D,\Delta} &\iff DM - M\Delta = (0) \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = (0) \\
&\iff \begin{pmatrix} x & y \\ rz & rt \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & sy \\ z & ts \end{pmatrix} = (0) \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & y(1-s) \\ z(r-1) & (r-s)t \end{pmatrix} = (0).
\end{aligned}$$

Cette égalité matricielle équivaut elle-même au système : $\begin{cases} y(1-s) &= 0 \\ z(r-1) &= 0 \\ (r-s)t &= 0 \end{cases}$

C'est-à-dire $y = z = t = 0$ puisque $s \neq 1$ et $r \neq 1$ et $r \neq s$.

$$V_{D,\Delta} = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ / \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

b)

$$V_{D,\Delta} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \boxed{\text{vect}(U_1).}$$

QUESTION–3.

a) Rappelons que les matrices de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ peuvent être considérées comme matrices des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique. Comme $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne peuvent pas avoir plus de deux valeurs propres distinctes. **Les réels 1 et $a-b$ étant distincts, si nous vérifions que ces deux nombres sont valeurs propres de A, on pourra conclure que 1 et $a-b$ sont les valeurs propres de A.**

- Montrons qu'il existe un couple $(x, y) \neq (0, 0)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\begin{cases} ax + (1-a)y & = x \\ bx + (1-b)y & = y \end{cases} ; \begin{cases} (a-1)x + (1-a)y & = 0 \\ bx - by & = 0 \end{cases} ; \begin{cases} (a-1)(x-y) & = 0 \\ b(x-y) & = 0 \end{cases}$$

Effectuons alors l'opération $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$, cela donne le système équivalent :

$$\begin{cases} (a-b-1)(x-y) & = 0 \\ b(x-y) & = 0 \end{cases}$$

Or, par hypothèse, $a - b \neq 1$, donc $a - b - 1 \neq 0$ et la première équation équivaut à $x = y$ et cette solution vérifie aussi la deuxième équation.

En conclusion : le réel 1 est valeur propre de A , puisque l'équation $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ admet pour solutions tous les couples (x, x) avec $x \in \mathbb{R}$.
Par suite,

$$E_1(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- De la même façon, $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ équivaut au système :

$\begin{cases} ax + (1-a)y & = (a-b)x \\ bx + (1-b)y & = (a-b)y \end{cases}$ lui même équivalent à :

$bx + (1-a)y = 0$, soit aussi à $x = \dfrac{a-1}{b} y$ puisque $b \neq 0$.

En conclusion : le réel $a - b$ est valeur propre de A, puisque l'équation $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ admet pour solutions tous les couples $(\frac{a-b}{b} y, y)$ avec $y \in \mathbb{R}$. Par suite,

$$E_{a-b}(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{a-1}{b} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix} \right).$$

> Finalement la matrice A possède effectivement deux valeurs propres distinctes 1 et $a - b$; la condition suffisante de diagonalisation est satisfaite.