

# Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2002

## MATHEMATIQUES

### 1ère épreuve (option économique)



Lundi 29 avril 2002 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

### EXERCICE 1

On considère les deux matrices carrées réelles d'ordre quatre suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les questions 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

1. a. Calculer  $K^2$ .
- b. En déduire que la matrice  $K$  est inversible et déterminer  $K^{-1}$ .
- c. Montrer que la matrice  $K$  n'admet aucune valeur propre réelle.
2. Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels. On note  $M$  la matrice définie par  $M = aI + bK$ .
  - a. Montrer :  $M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM$ .
  - b. En déduire que, si  $(a, b) \neq (0, 0)$ , alors la matrice  $M$  est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de  $I$  et  $M$ .
  - c. Application : donner l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 + \sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3. On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ , et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  associé à la matrice  $K$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ . On considère les quatre éléments suivants de  $\mathbb{R}^4$  :

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3).$$

- Montrer que la famille  $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
- Exprimer  $f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)$  en fonction de  $v_1, v_2, v_3, v_4$  et en déduire la matrice  $K'$  associée à  $f$  relativement à la base  $\mathcal{C}$ .
- Déterminer la matrice de passage  $P$  de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{C}$ .
- Rappeler l'expression de  $K'$  en fonction de  $K, P$  et  $P^{-1}$ .

## EXERCICE 2

On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction polynomiale  $P_n : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

### I. Étude des fonctions polynomiales $P_n$

1. Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [0; +\infty[$  :

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}, \quad \text{où } P'_n \text{ désigne la dérivée de } P_n.$$

2. Étudier, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , les variations de  $P_n$  sur  $[0; +\infty[$  et dresser le tableau de variations de  $P_n$ .

3. Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $P_n(1) < 0$ .

4. a. Vérifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [0; +\infty[$  :

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left( -\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right).$$

- b. En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $P_n(2) \geq 0$ .

5. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $P_n(x) = 0$ , d'inconnue  $x \in [1; +\infty[$ , admet une solution et une seule, notée  $x_n$ , et que :

$$1 < x_n \leq 2.$$

6. Écrire un programme en langage Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée décimale de  $x_2$  à  $10^{-3}$  près.

## II. Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. Établir, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [0; +\infty[$  :

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt.$$

2. En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt.$$

3. Démontrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in [1; +\infty[$  :

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).$$

4. En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2,$$

puis :

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

## EXERCICE 3

### 1. Étude préliminaire

On admet, pour tout entier naturel  $k$  et pour tout réel  $x$  de  $[0; 1[$ , que la série  $\sum_{n \geq k} C_n^k x^n$  est

convergente et on note  $s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n$ .

a. Vérifier, pour tout réel  $x$  de  $[0; 1[$  :

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

b. Pour tout couple d'entiers naturels  $(n, k)$  tel que  $k < n$ , montrer :

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

c. Pour tout entier naturel  $k$  et pour tout réel  $x$  de  $[0; 1[$ , déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x).$$

d. Montrer, par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

## 2. Étude d'une expérience aléatoire

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).  
On définit la variable aléatoire  $N$  égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si  $N$  prend une valeur entière positive non nulle notée  $n$ , on réalise alors une seconde série de  $n$  tirages dans l'urne, toujours avec remise.  
On définit la variable aléatoire  $X$  égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

- Déterminer la loi de la variable aléatoire  $N$ . Donner son espérance.
- Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer la probabilité conditionnelle  $P(X = k / N = n)$ .
- Vérifier :  $P(X = 0) = \frac{4}{9}$ .
- En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{25}{36} \left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

- Montrer que  $X$  admet une espérance  $E(X)$  et calculer  $E(X)$ .
- Montrer :  $\forall k \in \mathbb{N}, P(X \leq k) = 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^k$ .

## 3. Étude d'une variable aléatoire à densité

On note  $a = -\frac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}$  et on définit la fonction  $F$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a; +\infty[ \\ F(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle :  $\forall x \in \mathbb{R}, \left(\frac{4}{9}\right)^x = e^{x \ln \frac{4}{9}}$ .

- Montrer que  $F$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, notée  $Y$ .
- Déterminer une densité  $f$  de  $Y$ .
- Déterminer une primitive de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x e^{x \ln \frac{4}{9}}$ .
- Montrer que  $Y$  admet une espérance  $E(Y)$  et calculer  $E(Y)$ .

- FIN -



## ANNALES DE MATHÉMATIQUES 2002

EM LYON

CORRIGE

## EXERCICE I

## QUESTION-1

a). Un calcul sans difficultés donne  $K^2 = -I$

b). On déduit de là que :  $K(-K) = (-K)K = I$ , donc

$K$  est inversible et  $K^{-1} = -K$ .

c). **Raisonnons par l'absurde** et supposons qu'il existe une valeur propre réelle  $\lambda$  ; alors **par définition** il existe une colonne  $X \neq (0) \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$  telle que  $KX = \lambda X$ . Multiplions cette égalité à gauche par  $K$ , on obtient :

$K(KX) = K(\lambda X)$ , soit  $K^2X = \lambda KX$ , ou  $-IX = \lambda^2 X$ , soit finalement  $\lambda^2 X = -X$  ; comme  $X \neq (0)$ , on sait que cette égalité équivaut à  $\lambda^2 = -1$ . **Cette équation n'a pas de solution réelle** (car il n'existe aucun nombre réel dont le carré soit strictement négatif). On aboutit donc à une absurdité : si  $\lambda$  est une valeur propre réelle de  $K$ , alors on doit avoir  $\lambda^2 = -1$ , ce qui est impossible.

La matrice  $K$  n'admet aucune valeur propre réelle.

*Remarque* : une autre façon de raisonner. Puisque  $K^2 = -I$ , alors  $K^2 + I = (0)$ . Cela veut dire que le polynôme  $P = X^2 + 1$ , qui n'est pas le polynôme nul, est annulateur de  $K$ . On sait, d'après le cours, que si  $K$  admet une valeur propre réelle, celle-ci est **nécessairement** racine de  $P$ . Or il est visible que  $P$  n'a pas de racines réelles car, pour tout réel  $x$  :  $P(x) \geq 1 > 0$ . La conclusion est que  $K$  n'a pas de valeurs propres réelles.

## QUESTION-2

a).  $M^2 = (aI + bK)^2 = a^2I^2 + 2abIK + b^2K^2$  puisque  $I$  et  $K$  **commutent**, soit  $M^2 = (a^2 - b^2)I + 2abK$ , et comme  $bK = M - aI$ , on obtient  $M^2 = (a^2 - b^2)I + 2a(M - aI)$ , soit finalement :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM.$$

b). Cette dernière égalité s'écrit aussi  $M(-M + 2aI) = (-M + 2aI)M = (a^2 + b^2)I$ . Or  $(a, b) \neq (0, 0)$ , donc  $(a^2 + b^2) \neq 0$ , ce qui permet de diviser par  $a^2 + b^2$  et on a :  $M\left(\frac{1}{a^2 + b^2}(-M + 2aI)\right) = \left(\frac{1}{a^2 + b^2}(-M + 2aI)\right)M = I$ .

La matrice  $M$  est inversible pour tous réels  $a$  et  $b$  tels que  $(a, b) \neq (0, 0)$  et  $M^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}(-M + 2aI)$ .

**Remarque** : Pour montrer l'inversibilité d'une matrice  $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , nous sommes revenus à la définition, à savoir il existe une matrice  $B' \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telle que  $BB' = B'B = I$ . On aurait pu se dispenser de vérifier les deux égalités car le lecteur sait certainement que grâce au théorème du rang il suffit d'avoir  $BB' = I$  pour pouvoir affirmer que  $B$  est inversible et que  $B^{-1} = B'$ .

c). On a  $M = \sqrt{2}I + K$  ; c'est le cas particulier  $a = \sqrt{2}$  et  $b = 1$ . On peut affirmer compte tenu du b) que  $M$  est inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{3}(-M + 2\sqrt{2}I)$$

Sous forme matricielle  $M^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 + 2\sqrt{2} & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 + 2\sqrt{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

### QUESTION-3

a). On a  $v_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $v_2 = (1, 1, 0, 1)$ ,  $v_3 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $v_4 = (-1, 1, 0, 0)$

Ecrivons la matrice  $P$  des coordonnées en colonnes de ces 4 vecteurs dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et effectuons } L_4 \leftarrow L_4 - L_2, \text{ il vient } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ C'est une}$$

matrice triangulaire dont aucun terme diagonal n'est nul :

La matrice  $P$  est inversible et par suite, c'est un résultat du cours, les vecteurs  $v_1, v_2, v_3$  et  $v_4$  forment une base de  $\mathbb{R}^4$ .

b). Les calculs sont sans difficultés, ils se font matriciellement : soit  $u \in \mathbb{R}^4$  et  $U$  la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ , alors la matrice colonne des coordonnées de  $f(u)$  dans cette même base est  $U'$  donnée par  $U' = KU$ . On obtient

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (1, 1, 0, 1) = v_2 \\ f(v_2) &= f(f(v_1)) = -v_1 \quad \text{car } K^2 = -I \iff f^2 = -\text{Id} \\ f(v_3) &= (-1, 1, 0, 0) = v_4 \\ f(v_4) &= f(f(v_3)) = -v_3. \end{aligned}$$

Par **définition** de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée,

$$K' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c). Nous avons répondu à cette question dans le a) : pour mémoire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d). La matrice  $K'$  est la matrice de  $f$  dans la base  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  et  $K$  est la matrice de  $f$  dans la base canonique, donc d'après la **formule de changement de base**

pour les matrices  $K' = P^{-1}KP$