EMLYON Graduate School of Management

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2002

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Lundi 29 avril 2002 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère les deux matrices carrées réelles d'ordre quatre suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les questions 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

1. a. Calculer K^2.

b. En déduire que la matrice K est inversible et déterminer K^{-1}.

c. Montrer que la matrice K n'admet aucune valeur propre réelle.

2. Soient a et b deux nombres réels. On note M la matrice définie par $M = aI + bK$.

a. Montrer : $M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM$.

b. En déduire que, si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors la matrice M est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de I et M.

c. *Application :* donner l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à la matrice K relativement à la base $\mathcal{B}$. On considère les quatre éléments suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3).$$

a. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b. Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$, $f(v_4)$ en fonction de v_1, v_2, v_3, v_4 et en déduire la matrice K' associée à f relativement à la base $\mathcal{C}$.

c. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

d. Rappeler l'expression de K' en fonction de K, P et P^{-1}.

EXERCICE 2

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

I. *Étude des fonctions polynomiales P_n*

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}, \quad \text{où } P_n' \text{ désigne la dérivée de } P_n.$$

2. Étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.

3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

4. a. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right).$$

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geqslant 0$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1\,;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée x_n, et que :

$$1 < x_n \leqslant 2.$$

6. Écrire un programme en langage Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II. *Limite de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t\,.$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\,\mathrm{d}t.$$

3. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1\,;+\infty[$:

$$t^{2n}-1 \geqslant n(t^2-1).$$

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{n}{2}(x_n-1)^2,$$

puis :

$$0 < x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 3

1. ***Étude préliminaire***

On admet, pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0\,;1[$, que la série $\sum\limits_{n\geqslant k} C_n^k x^n$ est convergente et on note $s_k(x) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n$.

a. Vérifier, pour tout réel x de $[0\,;1[$:

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

b. Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tel que $k<n$, montrer :

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

c. Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0\,;1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x).$$

d. Montrer, par récurrence :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0\,;1[,\quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\,.$$

2. *Étude d'une expérience aléatoire*

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
  On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
  On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

a. Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance.

b. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(X = k \;/\; N = n)$.

c. Vérifier : $$\mathrm{P}(X = 0) = \frac{4}{9}\cdot$$

d. En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X = k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k\cdot$$

e. Montrer que X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ et calculer $\mathrm{E}(X)$.

f. Montrer : $$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X \leqslant k) = 1 - \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^k\cdot$$

3. *Étude d'une variable aléatoire à densité*

On note $a = -\dfrac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a\,; +\infty[\\ F(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle : $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left(\frac{4}{9}\right)^x = \mathrm{e}^{x \ln \frac{4}{9}}.$$

a. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, notée Y.

b. Déterminer une densité f de Y.

c. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{x \ln \frac{4}{9}}$.

d. Montrer que Y admet une espérance $\mathrm{E}(Y)$ et calculer $\mathrm{E}(Y)$.

- FIN -

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2002

EM LYON

CORRIGE

EXERCICE I

QUESTION–1

a). Un calcul sans difficultés donne $\boxed{K^2 = -I}$

b). On déduit de là que : $K(-K) = (-K)K = I$, donc

$$\boxed{K \text{ est inversible et } K^{-1} = -K.}$$

c). Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une valeur propre réelle λ ; alors **par définition** il existe une colonne $X \neq (0) \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telle que $KX = \lambda X$. Multiplions cette égalité à gauche par K, on obtient :

$K(KX) = K(\lambda X)$, soit $K^2X = \lambda KX$, ou $-IX = \lambda^2 X$, soit finalement $\lambda^2 X = -X$; comme $X \neq (0)$, on sait que cette égalité équivaut à $\lambda^2 = -1$. **Cette équation n'a pas de solution réelle** (car il n'existe aucun nombre réel dont le carré soit strictement négatif) . On aboutit donc à une absurdité : si λ est une valeur propre réelle de K, alors on doit avoir $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible.

$$\boxed{\text{La matrice } K \text{ n'admet aucune valeur propre réelle.}}$$

Remarque : une autre façon de raisonner. Puisque $K^2 = -I$, alors $K^2 + I = (0)$. Cela veut dire que le polynôme $P = X^2 + 1$, qui n'est pas le polynôme nul, est annulateur de K. On sait, d'après le cours, que si K admet une valeur propre réelle, celle-ci est **nécessairement** racine de P. Or il est visible que P n'a pas de racines réelles car, pour tout réel x : $P(x) \geq 1 > 0$. La conclusion est que K n'a pas de valeurs propres réelles.

QUESTION–2

a). $M^2 = (aI + bK)^2 = a^2I^2 + 2abIK + b^2K^2$ puisque I et K **commutent**, soit $M^2 = (a^2 - b^2)I + 2abK$, et comme $bK = M - aI$, on obtient $M^2 = (a^2 - b^2)I + 2a(M - aI)$, soit finalement :

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \ M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM.}$$

b). Cette dernière égalité s'écrit aussi $M(-M + 2aI) = (-M + 2aI)M = (a^2 + b^2)I$. Or $(a, b) \neq (0, 0)$, donc $(a^2 + b^2) \neq 0$, ce qui permet de diviser par $a^2 + b^2$ et on a : $M\Big(\frac{1}{a^2 + b^2}(-M + 2aI)\Big) = \Big(\frac{1}{a^2 + b^2}(-M + 2aI)\Big)M = I$.

$$\boxed{\text{La matrice } M \text{ est inversible pour tous réels } a \text{ et } b \text{ tels que } (a,b) \neq (0,0) \text{ et } M^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}(-M+2aI).}$$

Remarque : Pour montrer l'inversibilité d'une matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, nous sommes revenus à la définition, à savoir il existe une matrice $B' \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $BB' = B'B = I$. On aurait pu se dispenser de vérifier les deux égalités car le lecteur sait certainement que grâce au théorème du rang il suffit d'avoir $BB' = I$ pour pouvoir affirmer que B est inversible et que $B^{-1} = B'$.

c). On a $M = \sqrt{2}I + K$; c'est le cas particulier $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$. On peut affirmer compte tenu du **b)** que M est inversible et $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{3}(-M + 2\sqrt{2}I)}$

$$\text{Sous forme matricielle } M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1+2\sqrt{2} & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1+2\sqrt{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

QUESTION–3

a). On a $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (1,1,0,1)$, $v_3 = (0,0,1,0)$, $v_4 = (-1,1,0,0)$

Ecrivons la matrice P des coordonnées en colonnes de ces 4 vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et effectuons $L_4 \longleftarrow L_4 - L_2$, il vient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. C'est une matrice triangulaire dont aucun terme diagonal n'est nul :

$$\boxed{\text{La matrice } P \text{ est inversible et par suite, c'est un résultat du cours, les vecteurs } v_1,\ v_2,\ v_3 \text{ et } v_4 \text{ forment une base de } \mathbb{R}^4.}$$

b). Les calculs sont sans difficultés, ils se font matriciellement : soit $u \in \mathbb{R}^4$ et U la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, alors la matrice colonne des coordonnées de $f(u)$ dans cette même base est U' donnée par $U' = KU$. On obtient

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (1,1,0,1) = v_2 \\ f(v_2) &= f(f(v_1)) = -v_1 \quad \text{car } K^2 = -I \iff f^2 = -\mathrm{Id} \\ f(v_3) &= (-1,1,0,0) = v_4 \\ f(v_4) &= f(f(v_3)) = -v_3. \end{aligned}$$

Par **définition** de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée,

$$K' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c). Nous avons répondu à cette question dans le **a)** : pour mémoire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d). La matrice K' est la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4) et K est la matrice de f dans la base canonique, donc d'après la **formule de changement de base pour les matrices** $\boxed{K' = P^{-1}KP}$