



ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD  
Concours d'admission sur classes préparatoires

**MATHEMATIQUES**  
Option économique

**Mardi 30 Avril 2002, de 8 h à 12 h**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

**Exercice 1**

Pour tout nombre réel  $x$ , on note  $[x]$  la partie entière de  $x$ , c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant :  $[x] \leq x < [x] + 1$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ).

On pose  $Y = [X]$ ,  $Y$  est donc la partie entière de  $X$  et on a :  $\forall k \in \mathbb{Z}, (Y = k) = (k \leq X < k+1)$ .

- 1) a. Montrer que  $Y$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ .
- b. Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , calculer  $P(Y = k-1)$ .
- c. En déduire que la variable aléatoire  $Y+1$  suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
- d. Donner l'espérance et la variance de  $Y+1$ . En déduire l'espérance et la variance de  $Y$ .

2) On pose  $Z = X - Y$ .

- a. Déterminer  $Z(\Omega)$ .
- b. En utilisant le système complet d'événements  $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$ , montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, P(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$$

- c. En déduire une densité  $f$  de  $Z$ .
- d. Déterminer l'espérance  $E(Z)$  de  $Z$ . Ce résultat était-il prévisible ?

## Exercice 2

On désigne par  $n$  un entier naturel non nul.

On lance  $n$  fois une pièce de monnaie donnant "pile" avec la probabilité  $p$  (avec  $0 < p < 1$ ) et "face" avec la probabilité  $q = 1 - p$ . On appelle  $k$ -chaîne de "pile" une suite de  $k$  lancers consécutifs ayant tous donné "pile", cette suite devant être suivie d'un "face" ou être la dernière suite du tirage.

Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $Y_k$  la variable aléatoire égale au nombre total de  $k$ -chaînes de "pile" obtenues au cours de ces  $n$  lancers.

Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on pourra noter  $P_k$  l'événement « on obtient "pile" au  $k^{\text{ème}}$  lancer ».

Par exemple, avec  $n = 11$ , si l'on a obtenu les résultats  $P_1 P_2 F_3 F_4 P_5 P_6 P_7 F_8 P_9 F_{10} P_{11}$  alors  $Y_1 = 2$ ,  $Y_2 = 1$  et  $Y_3 = 1$ .

Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , l'espérance de  $Y_k$ , notée  $E(Y_k)$ .

1) Déterminer la loi de  $Y_n$  et donner  $E(Y_n)$ .

2) Montrer que  $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$  et donner  $E(Y_{n-1})$ .

3) Dans cette question,  $k$  désigne un entier de  $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$ .

Pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $X_{i,k}$  la variable aléatoire qui vaut 1 si une  $k$ -chaîne de "pile" commence au  $i^{\text{ème}}$  lancer et qui vaut 0 sinon.

a. Calculer  $P(X_{1,k} = 1)$ .

b. Soit  $i \in \llbracket 2, n-k \rrbracket$ . Montrer que  $P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k$ .

c. Montrer que  $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$ .

d. Exprimer  $Y_k$  en fonction des variables  $X_{i,k}$  puis déterminer  $E(Y_k)$ .

## Exercice 3

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par : 
$$\begin{cases} \forall x > 0, f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2} \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1) a. Vérifier que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

b. Étudier le signe de  $f(x)$ .

2) Montrer que l'on définit bien une fonction  $F$  sur  $\mathbb{R}_+$  en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

3) Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}_+$ , on pose :  $g(x) = F(x) - x$ .

a. Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et que, pour  $x > 0$ , on peut écrire  $g'(x)$  sous la forme

$$g'(x) = \frac{-x h(x)}{1+x^2}.$$

b. Étudier les variations de  $h$ , puis en déduire son signe (on donne  $\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq -0,48$ ).

c. En déduire le signe de  $g(x)$ .

4) On définit la suite  $(u_n)$  par la donnée de son premier terme  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence, valable pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = F(u_n)$ .

a. Établir par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$ .

b. Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que  $(u_n)$  est décroissante.

c. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge et donner  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

## Problème

### Partie 1 : étude d'un ensemble de matrices.

On considère les matrices suivantes de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On note  $E$  l'ensemble des matrices  $M$  s'écrivant  $M = aI + bJ + cK + dL$ , où  $a, b, c$  et  $d$  décrivent  $\mathbb{R}$ .

- 1) a. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel.  
b. Montrer que la famille  $(I, J, K, L)$  est libre.  
c. Donner la dimension de  $E$ .
- 2) a. Montrer, en les calculant explicitement, que  $J^2, K^2, L^2, J^3$  et  $K^3$  appartiennent à  $E$ .  
b. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que  $JK, KJ, KL, LK, JL$  et  $LJ$  appartiennent aussi à  $E$ .  
c. Établir enfin que le produit de deux matrices de  $E$  est encore une matrice de  $E$ .
- 3) a. Montrer que  $L$  est diagonalisable.  
b. Déterminer les valeurs propres de  $L$  ainsi que les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

4) On considère les vecteurs :  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$

- a. Montrer que  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  est une base de  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ .
- b. Vérifier que  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$  sont des vecteurs propres de  $L$  et de  $J + K$ .

### Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire.

Dans cette partie,  $p$  désigne un réel de  $]0,1[$ .

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales relient elles le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

Un pion se déplace sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin (relié par un côté) avec la probabilité  $p$  ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité  $1 - 2p$ .

On note  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant  $n$ . On a donc  $X_0 = 1$ .

- 1) a. Écrire la matrice  $A$ , carrée d'ordre 4, dont le terme situé à l'intersection de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne est égal à la probabilité conditionnelle  $P(X_{n+1} = i / X_n = j)$ .  
b. Vérifier que  $A$  s'écrit comme combinaison linéaire de  $J + K$  et  $L$ .

- 2) a. Pour tout  $i$  de  $\{1, 2, 3, 4\}$ , calculer  $A u_i$ . En déduire qu'il existe une matrice  $D$  diagonale et une matrice  $P$  inversible telles que  $A = P D P^{-1}$ . Expliciter  $D$  et  $P$ .
- b. Calculer  $P^2$  puis en déduire  $P^{-1}$ .

3) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on pose  $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$ .

- a. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que  $C_{n+1} = A C_n$ .
- b. En déduire que  $C_n = \frac{1}{4} P D^n P C_0$ , puis donner la loi de  $X_n$  pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1.



## ANNALES DE MATHÉMATIQUES 2002

EDHEC

CORRIGE

## EXERCICE 1

## QUESTION-1

a. Rappelons qu'une densité  $g$  de la variable  $X$  est définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$g$  étant nulle sur  $\mathbb{R}_-$ , on peut dire que  $X$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ , ainsi  $[X] \in \mathbb{N}$ .

$Y$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

b. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} P(Y = k - 1) &= P(k - 1 \leq X < k) = \int_{k-1}^k \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= [-e^{-\lambda t}]_{k-1}^k = -e^{-\lambda k} + e^{-\lambda(k-1)} \\ &= -e^{-\lambda(k-1)-\lambda} + e^{-\lambda(k-1)} = -e^{-\lambda} e^{-\lambda(k-1)} + e^{-\lambda(k-1)} \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y = k - 1) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)}.$$

c. Notons  $\Omega$  l'univers sur lequel  $X$  et  $Y$  sont définies.

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \iff (Y + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*.$$

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y + 1 = k) &= P(Y = k - 1) \\ &= (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)} \quad \text{d'après b)} \\ &= (1 - e^{-\lambda})(e^{-\lambda})^{k-1} \end{aligned}$$

Or  $\lambda > 0$ , donc  $0 < e^{-\lambda} < 1$  et par suite  $0 < 1 - e^{-\lambda} < 1$ . Si l'on pose  $p = 1 - e^{-\lambda}$  et  $q = 1 - p$ , on peut écrire :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y + 1 = k) = q^{k-1}p$

La variable  $Y + 1$  suit la loi géométrique de paramètre  $p = 1 - e^{-\lambda}$ .

d. D'après le cours et avec les notations précédentes,

$$E(Y + 1) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \quad \text{et} \quad V(Y + 1) = \frac{q}{p^2} = \frac{1 - p}{p^2} = \frac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2}.$$

Par linéarité de l'espérance,  $E(Y + 1) = E(Y) + 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1 - p}{p}$ , donc

$$E(Y) = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

On sait que  $V(Y+1) = V(Y)$ , donc  $V(Y) = \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}$ .

### QUESTION-2

a.  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $[x] \leq x < [x]+1$ , par définition de la partie entière. Donc  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq x-[x] < 1$ . Par suite  $0 \leq X-[X] < 1$ , c'est-à-dire  $0 \leq Z < 1$ . Or  $X$  peut prendre toutes les valeurs de  $\mathbb{R}_+^*$ , donc  $X-[X]$  peut prendre toutes les valeurs de  $]0; 1[$ .

$$Z(\Omega) = ]0; 1[.$$

b. Pour tout  $x \in ]0; 1[$ , l'événement  $(Z \leq x)$  est égal à l'événement  $(0 \leq X-[X] \leq x)$  c'est-à-dire (en ajoutant  $[X] = Y$  au trois termes de l'encadrement) à  $(Y \leq X \leq Y+x)$ . C'est donc, en utilisant le système complet d'événements  $\{(Y = k) / k \in \mathbb{N}\}$ , la réunion des événements deux à deux incompatibles :

$$(Z \leq x) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (Y = k) \cap (k \leq X \leq k+x). \quad (\text{I})$$

Puisque  $x < 1$ ,  $(k \leq X \leq k+x) \subset (k \leq X < k+1)$ . Or il n'existe qu'un seul entier vérifiant cet encadrement, c'est  $[X]$ , c'est-à-dire  $Y$ , et par conséquent :  $(k \leq X \leq k+x) \implies (Y = k)$ , ce qui se traduit aussi par  $(k \leq X \leq k+x) \subset (Y = k)$ , donc on a bien

$$(k \leq X \leq k+x) \cap (Y = k) = (k \leq X \leq k+x)$$

L'égalité (I) devient alors

$(Z \leq x) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (k \leq X \leq k+x)$ . Les événements  $(k \leq X \leq k+x)$  sont deux à deux incompatibles (puisque'ils sont égaux aux événements  $(Y = k) \cap (k \leq X \leq k+x)$  qui le sont). On obtient donc :

$$\begin{aligned} P(Z \leq x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(k \leq X < k+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+x} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-e^{-\lambda(k+x)} + e^{-\lambda k}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k} (1 - e^{-\lambda x}) \\ &= (1 - e^{-\lambda x}) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k} = (1 - e^{-\lambda x}) \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\lambda})^k \end{aligned}$$

On reconnaît la somme de la série géométrique de raison  $e^{-\lambda}$  et de premier terme 1 ; cette série converge puisque sa raison  $e^{-\lambda}$  appartient à  $]0; 1[$  et sa somme vaut  $\frac{1}{1 - e^{-\lambda}}$ .

$$\forall x \in ]0; 1[, P(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

c. Soit  $F$  la fonction de répartition de  $Z$ .

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \text{ d'après le b)} \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

La fonction  $F$  est continue, dérivable sur  $] -\infty; 0[$ , sur  $]0; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$ . Nous prendrons donc pour densité  $f$  de  $Y$  :  $f(x) = F'(x)$  sur  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$  et par exemple  $f(0) = f(1) = 0$  ; cela donne donc

$$f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \text{ et } f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} \text{ si } 0 < x < 1.$$

d. L'espérance  $E(Z)$  existe car l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^1 tf(t)dt = \int_0^1 t \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}} dt$  d'une part et, d'autre part, la fonction  $t \mapsto t \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}}$  est continue sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

$$E(Z) = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \int_0^1 te^{-\lambda t} dt.$$

Posons  $u(t) = t$  ;  $u'(t) = 1$  ;  $v'(t) = e^{-\lambda t}$  ;  $v(t) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; 1]$ .

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \left( \left[ -\frac{te^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 e^{-\lambda t} dt \right) \\ &= \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \left( -\frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \left[ -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^1 \right) \\ &= \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \left( -\frac{e^{-\lambda}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right). \end{aligned}$$

$$E(Z) = \frac{1}{\lambda(1 - e^{-\lambda})} (1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda})$$

Ce résultat était prévisible. En effet,  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$  (c'est un résultat du cours) et on a établi que  $E(Y) = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$ . Or  $Z = X - Y$ , donc par linéarité de l'espérance  $E(Z) = E(X) - E(Y)$ , soit

$E(Z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}}{\lambda(1 - e^{-\lambda})}$  après avoir réduit au même dénominateur. C'est bien le résultat précédent.

## EXERCICE 2

### QUESTION-1

Au cours de  $n$  lancers, il ne peut y avoir au plus qu'une  $n$ -chaîne : c'est celle qui correspondant aux tirages de  $n$  " pile ". La variable  $Y_n$  prend donc deux valeurs : 0

ou 1.  $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$ .

Nous pouvons noter que la variable  $Y_n$  est une variable de Bernoulli.

L'événement  $(Y_n = 1)$  est l'événement : au cours des  $n$  lancers on a obtenu  $n$  " pile " ; l'événement  $(Y_n = 0)$  est l'événement contraire, c'est-à-dire : au cours des  $n$  lancers on a obtenu au moins une " face ".

Notons pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $P_k$  l'événement : on a obtenu " pile " au  $k^{\text{ème}}$  lancer et  $F_k$  l'événement : on a obtenu " face " au  $k^{\text{ème}}$  lancer.

$(Y_n = 1) = \bigcap_{k=1}^n P_k$  ; les lancers sont indépendants et pour tout  $k$  dans l'intervalle

$\llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $P(P_k) = p$ , donc  $P(Y_n = 1) = p^n$ .

$Y_n$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p^n$  :  $E(Y_n) = p^n$ .