ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Mardi 30 Avril 2002, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Pour tout nombre réel x, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $[x] \leq x < [x] + 1$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).

On pose $Y = [X]$, Y est donc la partie entière de X et on a : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $(Y = k) = (k \leq X < k+1)$.

1) a. Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
   b. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k-1)$.
   c. En déduire que la variable aléatoire $Y+1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
   d. Donner l'espérance et la variance de $Y+1$. En déduire l'espérance et la variance de Y.

2) On pose $Z = X - Y$.
   a. Déterminer $Z(\Omega)$.
   b. En utilisant le système complet d'événements $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que :
   $$\forall x \in [0, 1[, \ P(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}.$$
   c. En déduire une densité f de Z.
   d. Déterminer l'espérance $E(Z)$ de Z. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul.

On lance n fois une pièce de monnaie donnant "*pile*" avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et "*face*" avec la probabilité $q = 1 - p$. On appelle k-chaîne de "*pile*" une suite de k lancers consécutifs ayant tous donné "*pile*", cette suite devant être suivie d'un "*face*" ou être la dernière suite du tirage.

Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k-chaînes de "*pile*" obtenues au cours de ces n lancers.

Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on pourra noter P_k l'événement « on obtient "*pile*" au $k^{\text{ème}}$ lancer ».

Par exemple, avec $n = 11$, si l'on a obtenu les résultats $P_1 P_2 F_3 F_4 P_5 P_6 P_7 F_8 P_9 F_{10} P_{11}$ alors $Y_1 = 2$, $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 1$.

Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, l'espérance de Y_k, notée $E(Y_k)$.

1) Déterminer la loi de Y_n et donner $E(Y_n)$.

2) Montrer que $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$ et donner $E(Y_{n-1})$.

3) Dans cette question, k désigne un entier de $[\![1, n-2]\!]$.

Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k-chaîne de "*pile*" commence au $i^{\text{ème}}$ lancer et qui vaut 0 sinon.

a. Calculer $P(X_{1,k} = 1)$.

b. Soit $i \in [\![2, n-k]\!]$. Montrer que $P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k$.

c. Montrer que $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$.

d. Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$ puis déterminer $E(Y_k)$.

Exercice 3

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} \forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{-x \ln x}{1+x^2} \\ f(0) = 0. \end{cases}$

1) a. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Étudier le signe de $f(x)$.

2) Montrer que l'on définit bien une fonction F sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

3) Pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on pose : $g(x) = F(x) - x$.

a. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour $x > 0$, on peut écrire $g'(x)$ sous la forme $g'(x) = \dfrac{-x\,h(x)}{1+x^2}$.

b. Étudier les variations de h, puis en déduire son signe (on donne $\ln \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq -0{,}48$).

c. En déduire le signe de $g(x)$.

4) On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = F(u_n)$.

a. Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.

b. Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) converge et donner $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Problème

Partie 1 : étude d'un ensemble de matrices.

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \ K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant $M = aI + bJ + cK + dL$, où a, b, c et d décrivent $\mathbb{R}$.

1) a. Montrer que E est un espace vectoriel.
   b. Montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.
   c. Donner la dimension de E.

2) a. Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et K^3 appartiennent à E.
   b. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E.
   c. Établir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

3) a. Montrer que L est diagonalisable.
   b. Déterminer les valeurs propres de L ainsi que les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

4) On considère les vecteurs : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   a. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
   b. Vérifier que u_1, u_2, u_3 et u_4 sont des vecteurs propres de L et de $J + K$.

Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire.

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0,1[$.

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant elles le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

Un pion se déplace sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin (relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1 - 2p$.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n. On a donc $X_0 = 1$.

1) a. Écrire la matrice A, carrée d'ordre 4, dont le terme situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal à la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = i \ / \ X_n = j)$.
   b. Vérifier que A s'écrit comme combinaison linéaire de $J + K$ et L.

2) a. Pour tout i de $\{1, 2, 3, 4\}$, calculer $A\,u_i$. En déduire qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter D et P.

b. Calculer P^2 puis en déduire P^{-1}.

3) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$.

a. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $C_{n+1} = A\,C_n$.

b. En déduire que $C_n = \dfrac{1}{4} PD^nPC_0$, puis donner la loi de X_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2002

EDHEC

CORRIGE

EXERCICE 1

QUESTION–1

a. Rappelons qu'une densité g de la variable X est définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

g étant nulle sur $\mathbb{R}_-$, on peut dire que X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, ainsi $[X] \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{Y \text{ prend ses valeurs dans } \mathbb{N}.}$$

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y = k-1) \quad &= P(k-1 \leq X < k) = \int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \left[-e^{-\lambda t} \right]_{k-1}^{k} = -e^{-\lambda k} + e^{-\lambda(k-1)} \\ &= -e^{-\lambda(k-1)-\lambda} + e^{-\lambda(k-1)} = -e^{-\lambda}e^{-\lambda(k-1)} + e^{-\lambda(k-1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \ P(Y = k-1) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)}.}$$

c. Notons Ω l'univers sur lequel X et Y sont définies.

$Y(\Omega) = \mathbb{N} \iff (Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \ P(Y+1 = k) \quad &= P(Y = k-1) \\ &= (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)} \quad \text{d'après b)} \\ &= (1 - e^{-\lambda})\left(e^{-\lambda}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

Or $\lambda > 0$, donc $0 < e^{-\lambda} < 1$ et par suite $0 < 1 - e^{-\lambda} < 1$. Si l'on pose $p = 1 - e^{-\lambda}$ et $q = 1 - p$, on peut écrire : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \ P(Y+1 = k) = q^{k-1}p$

$$\boxed{\text{La variable } Y+1 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } p = 1 - e^{-\lambda}.}$$

d. D'après le cours et avec les notations précédentes,

$E(Y+1) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{1 - e^{-\lambda}}$ et $V(Y+1) = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2}$.

Par linéarité de l'espérance, $E(Y+1) = E(Y) + 1 = \dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{1-p}{p}$, donc

$$\boxed{E(Y) = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.}$$

On sait que $V(Y+1) = V(Y)$, donc $\boxed{V(Y) = \dfrac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}.}$

QUESTION–2

a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $[x] \leq x < [x]+1$, par définition de la partie entière. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x-[x] < 1$. Par suite $0 \leq X - [X] < 1$, c'est-à-dire $0 \leq Z < 1$. Or X peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{R}_+^*$, donc $X - [X]$ peut prendre toutes les valeurs de $[0;1[$.

$$\boxed{Z(\Omega) = [0;1[.}$$

b. Pour tout $x \in [0;1[$, l'événement $(Z \leq x)$ est égal à l'événement $(0 \leq X - [X] \leq x)$ c'est-à-dire (en ajoutant $[X] = Y$ au trois termes de l'encadrement) à $(Y \leq X \leq Y+x)$. C'est donc, en utilisant le système complet d'événements $\{(Y=k) \ / \ k \in \mathbb{N}\}$, la réunion des événements deux à deux incompatibles :

$$(Z \leq x) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (Y=k) \cap (k \leq X \leq k+x). \qquad \textbf{(I)}$$

Puisque $x < 1$, $(k \leq X \leq k+x) \subset (k \leq X < k+1)$. Or il n'existe qu'un seul entier vérifiant cet encadrement, c'est $[X]$, c'est-à-dire Y, et par conséquent : $(k \leq X \leq k+x) \Longrightarrow (Y=k)$, ce qui se traduit aussi par $(k \leq X \leq k+x) \subset (Y=k)$, donc on a bien

$$(k \leq X \leq k+x) \cap (Y=k) = (k \leq X \leq k+x)$$

L'égalité **(I)** devient alors

$(Z \leq x) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} (k \leq X \leq k+x)$. Les événements $(k \leq X \leq k+x)$ sont deux à deux incompatibles (puisqu'ils sont égaux aux événements $(Y=k) \cap (k \leq X \leq k+x)$ qui le sont). On obtient donc :

$$\begin{aligned}
P(Z \leq x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(k \leq X < k+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+x} \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (-e^{-\lambda(k+x)} + e^{-\lambda k}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda x}) \\
&= (1-e^{-\lambda x}) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k} = (1-e^{-\lambda x}) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-\lambda}\right)^k
\end{aligned}$$

On reconnaît la somme de la série géométrique de raison $e^{-\lambda}$ et de premier terme 1 ; cette série converge puisque sa raison $e^{-\lambda}$ appartient à $]0;1[$ et sa somme vaut $\dfrac{1}{1-e^{-\lambda}}$.

$$\boxed{\forall x \in [0;1[, \ \ P(Z \leq x) = \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}.}$$

c. Soit F la fonction de répartition de Z.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \text{ d'après le b)} \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

La fonction F est continue, dérivable sur $]-\infty;0[$, sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$. Nous prendrons donc pour densité f de Y : $f(x) = F'(x)$ sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$ et par exemple $f(0) = f(1) = 0$; cela donne donc

$$\boxed{f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \text{ et } f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} \text{ si } 0 < x < 1.}$$

d. L'espérance $E(Z)$ existe car l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^1 tf(t)dt = \int_0^1 t\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda}}dt$ d'une part et, d'autre part, la fonction $t \longmapsto t\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda}}$ est continue sur l'intervalle $[0;1]$.

$$E(Z) = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} \int_0^1 te^{-\lambda t}dt.$$

Posons $u(t) = t$; $u'(t) = 1$; $v'(t) = e^{-\lambda t}$; $v(t) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}\Big(\big[-\frac{te^{-\lambda t}}{\lambda}\big]_0^1 + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 e^{-\lambda t}dt\Big) \\ &= \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}\Big(-\frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\big[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\big]_0^1\Big) \\ &= \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}\Big(-\frac{e^{-\lambda}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\Big). \end{aligned}$$

$$\boxed{E(Z) = \frac{1}{\lambda(1-e^{-\lambda})}\Big(1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}\Big)}$$

Ce résultat était prévisible. En effet, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ (c'est un résultat du cours) et on a établi que $E(Y) = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$. Or $Z = X - Y$, donc par linéarité de l'espérance $E(Z) = E(X) - E(Y)$, soit

$E(Z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = \frac{1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}}{\lambda(1-e^{-\lambda})}$ après avoir réduit au même dénominateur. C'est bien le résultat précédent.

EXERCICE 2

QUESTION–1

Au cours de n lancers, il ne peut y avoir au plus qu'une n–chaîne : c'est celle qui correspondant aux tirages de n " pile ". La variable Y_n prend donc deux valeurs : 0 ou 1. $\boxed{Y_n(\Omega) = \{0, 1\}}$.

Nous pouvons noter que la variable Y_n **est une variable de Bernoulli.**

L'événement $(Y_n = 1)$ est l'événement : au cours des n lancers on a obtenu n " pile " ; l'événement $(Y_n = 0)$ est l'événement contraire, c'est-à-dire : au cours des n lancers on a obtenu au moins une " face ".

Notons pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, P_k l'événement : on a obtenu " pile " au k ème lancer et F_k l'événement : on a obtenu " face " au k ème lancer.

$(Y_n = 1) = \bigcap_{k=1}^{n} P_k$; les lancers sont indépendants et pour tout k dans l'intervalle $[\![1;n]\!]$, $P(P_k) = p$, donc $\boxed{P(Y_n = 1) = p^n.}$

$$\boxed{Y_n \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } p^n : E(Y_n) = p^n.}$$

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE