ecricome
banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
escbordeaux/escmarseille/icnnancy/escreims/escrouen/esctoulouse

J. 1699

CONCOURS D'ADMISSION 2002

option économique

MATHÉMATIQUES

mercredi 22 mai 2002 de 8 h 00 à 12 h 00

durée : 4 heures

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

1. EXERCICE

Dans l'ensemble $M_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on considère le sous-ensemble E des matrices $M(a,b)$ définies par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$E = \{M(a,b) \quad a,b \in \mathbb{R}\}$$

On note $f_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice $M(a,b)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1.1. Structure de E.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de E, ainsi que sa dimension.

1.2. Etude d'un cas particulier.

On pose $A = M(1,0)$.

1. Calculer A^2. En déduire que A est une matrice inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A.
3. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f_{1,0}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.3. Diagonalisation des éléments de E et application.

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\vec{u} = (1,1,1), \quad \vec{v} = (1,-1,0), \quad \vec{w} = (1,1,-2)$$

1. Justifier que les matrices de l'ensemble E sont diagonalisables.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

2. Montrer que $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Ecrire P.
4. Déterminer P^{-1}.
5. Exprimer les vecteurs $f_{a,b}(\vec{u})$, $f_{a,b}(\vec{v})$, $f_{a,b}(\vec{w})$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.
6. En déduire l'expression de la matrice $D_{a,b}$ de $f_{a,b}$ dans la base $\mathcal{C}$.
7. Justifier l'égalité :
$$P^{-1}M_{a,b}P = D_{a,b}$$
8. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $D_{a,b}$ soit inversible.
9. Cette condition étant réalisée, déterminer la matrice inverse de $D_{a,b}$.
10. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M_{a,b}$ soit inversible.

2. EXERCICE.

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x)$$

2.1. Etude des fonctions f_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

1. Etudier le sens de variation des fonctions h_n.
2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.
3. Etude du cas particulier $n = 1$.
   a. Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1,+\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
   b. En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1,+\infty[$.

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

   a. Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1, +\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.

   b. En déduire les variations de f_n sur $]-1, +\infty[$. (On distinguera les cas n pair et n impair). On précisera les limites aux bornes sans étudier les branches infinies.

2.2. Etude d'une suite.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)dx.$$

2.2.1. Calcul de U_1.

1. Prouver l'existence de trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in [0,1] \quad \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{1+x}$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx.$$

3. Montrer que $U_1 = \frac{1}{4}$.

2.2.2. Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

2. Justifier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. (on ne demande pas sa limite).

3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}$$

4. En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

2.2.3. Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$.

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$

1. Montrer que :
$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

2. En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

3. En utilisant une intégration par parties dans le calcul de U_n, montrer que :
$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - (1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1})\right]$$

3. EXERCICE.

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.
On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

3.1. Etude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages successifs avec remise de la boule dans l'urne.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k \text{ si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{ième}\text{tirage.} \\ Y = 0 \text{ si les n boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.

2. Pour $k \in \{1, ..., n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

3. Vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y=k) = 1.$$

4. Pour $x \neq 1$ et n entier non nul, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

5. En déduire $E(Y)$.

3.2. Etude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 \text{ si on obtient une boule blanche au } i^{ème} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.
6. Soit $p \leqslant n-1$.
   a. Déterminer $P(X_{p+1} = 1/Z_p = k)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
   b. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$$

   c. En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   (On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1, $X_2, \ldots$, X_p étant supposées suivre une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2002

ECRICOME

CORRIGE

EXERCICE–I

1.1 Structure de E.

QUESTION–1

$$E = \left\{ a \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
$$= \text{vect}\,(A, B)$$

Donc E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

QUESTION–2

Les deux matrices A et B forment par définition un système générateur de E, de plus elle ne sont pas proportionnelles, donc elles forment une famille libre.

Le système (A, B) est libre et générateur de E, c'est donc une base de E : il s'ensuit que $\dim E = 2$.

1.2 Un cas particulier.

QUESTION–1

La matrice A est celle introduite au I–1.1) : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Un calcul sans difficulté donne $A^2 = I$.

A est donc inversible et $A^{-1} = A$.

QUESTION–2

Soit λ un réel, alors $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.