ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–24

1) Soit n un entier strictement positif. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{1}{n + n^2x^2}$ est convergente.

On note $f(x)$ sa somme c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2x^2}$.

2) a) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) On note $I(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2x^2}$.

Montrer que $I(x)$ existe et que

$$\forall x > 0,\ I(x) \leq f(x) \leq I(x) + \frac{1}{1 + x^2}.$$

3) a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $x > 0$ et tout $t > 0$:

$$\frac{1}{t(1 + tx^2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1 + tx^2}.$$

b) Calculer $I(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

4) Soit $x_0 > 0$.

a) Montrer que :

$$\forall x > 0,\ |f(x) - f(x_0)| \leq |x^2 - x_0^2| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2}{n + n^2x^2}\right)\left(\frac{1}{n + n^2x_0^2}\right).$$

b) En déduire que :

$$\forall x > 0,\ |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{|x^2 - x_0^2|}{x^2} f(x_0).$$

c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION–1

$\sum u_n(x)$ est une série à termes positifs.

Comme $x \neq 0$, $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}\frac{1}{n^2}$.

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente car c'est une **série de Riemann avec** $\alpha = 2 > 1$ **;** donc la série $\sum \frac{1}{x^2}\frac{1}{n^2}$ est convergente et d'après la règle d'équivalence des séries positives équivalentes,

$$\boxed{\text{la série } \sum u_n(x) \text{ est convergente pour } x \neq 0.}$$

QUESTION–2

a)

f est la somme de fonctions décroissantes, donc elle est décroissante.

b)

- Pour $t \geq 1$, $\frac{1}{t + x^2t^2} \geq 0$.

Comme $x^2 \neq 0$, $\frac{1}{t + x^2t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}\frac{1}{t^2}$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente car $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est une fonction de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Par le théorème des équivalents de fonctions positives on conclut que

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + x^2t^2} \text{ est convergente.}}$$

- Soit $n \geq 1$. Pour $t \in [n; n+1]$, on a

$$n \leq t \leq n+1. \qquad \textbf{(a)}$$

On élève au carré car **les nombres sont positifs** ;

$n^2 \leq t^2 \leq (n+1)^2$. On multiplie par x^2 **qui est positif** ;

$$x^2n^2 \leq x^2t^2 \leq x^2(n+1)^2. \qquad \textbf{(b)}$$

On ajoute les inégalités **(a)** et **(b)**.

$$0 < n + x^2n^2 \leq t + x^2t^2 \leq n + 1 + x^2(n+1)^2.$$

Comme il s'agit de **nombres strictement positifs** on peut passer aux inverses :

$$\frac{1}{n+1+x^2(n+1)^2} \leq \frac{1}{t+x^2t^2} \leq \frac{1}{n+x^2n^2}.$$

Intégrons entre n et $n+1$ (**les bornes sont dans l'ordre croissant**), on obtient :

$\int_n^{n+1} \frac{dt}{n+1+x^2(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t+x^2t^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n+x^2n^2}$. Soit

$$\frac{1}{n+1+x^2(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t+x^2t^2} \leq \frac{1}{n+x^2n^2}.$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.