ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−24

1) Soit n un entier strictement positif. Montrer que pour tout réel $x>0$, la série de terme général $u_n(x)=\dfrac{1}{n+n^2x^2}$ est convergente.

On note $f(x)$ sa somme c'est-à-dire $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+n^2x^2}$.

2) a) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) On note $I(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t+t^2x^2}$.

Montrer que $I(x)$ existe et que

$$\forall x>0,\ I(x)\leq f(x)\leq I(x)+\frac{1}{1+x^2}.$$

3) a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $x>0$ et tout $t>0$:

$$\frac{1}{t(1+tx^2)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{1+tx^2}.$$

b) Calculer $I(x)$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

c) Donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

4) Soit $x_0>0$.

a) Montrer que :

$$\forall x>0,\ |f(x)-f(x_0)|\leq|x^2-x_0^2|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2}{n+n^2x^2}\right)\left(\frac{1}{n+n^2x_0^2}\right).$$

b) En déduire que :

$$\forall x>0,\ |f(x)-f(x_0)|\leq\frac{|x^2-x_0^2|}{x^2}f(x_0).$$

c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION–1

$\sum u_n(x)$ est une série à termes positifs.

Comme $x \neq 0$, $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{n^2}$.

La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est convergente car c'est une **série de Riemann avec** $\alpha = 2 > 1$ **;** donc la série $\sum \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{n^2}$ est convergente et d'après la règle d'équivalence des séries positives équivalentes,

$$\boxed{\text{la série } \sum u_n(x) \text{ est convergente pour } x \neq 0.}$$

QUESTION–2

a)

f est la somme de fonctions décroissantes, donc elle est décroissante.

b)

- Pour $t \geq 1$, $\dfrac{1}{t + x^2t^2} \geq 0$.

Comme $x^2 \neq 0$, $\dfrac{1}{t + x^2t^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{t^2}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente car $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est une fonction de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Par le théorème des équivalents de fonctions positives on conclut que

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + x^2t^2} \text{ est convergente.}}$$

- Soit $n \geq 1$. Pour $t \in [n; n+1]$, on a

$$n \leq t \leq n+1. \qquad \textbf{(a)}$$

On élève au carré car **les nombres sont positifs** ;

$n^2 \leq t^2 \leq (n+1)^2$. On multiplie par x^2 **qui est positif** ;

$$x^2n^2 \leq x^2t^2 \leq x^2(n+1)^2. \qquad \textbf{(b)}$$

On ajoute les inégalités **(a)** et **(b)**.

$$0 < n + x^2n^2 \leq t + x^2t^2 \leq n + 1 + x^2(n+1)^2.$$

Comme il s'agit de **nombres strictement positifs** on peut passer aux inverses :

$$\frac{1}{n+1+x^2(n+1)^2} \leq \frac{1}{t + x^2t^2} \leq \frac{1}{n + x^2n^2}.$$

Intégrons entre n et $n+1$ (**les bornes sont dans l'ordre croissant**), on obtient :

$\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{n+1+x^2(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t + x^2t^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n + x^2n^2}$. Soit

$$\frac{1}{n+1+x^2(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t + x^2t^2} \leq \frac{1}{n + x^2n^2}.$$