



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



### ANALYSE

### ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

**ÉNONCÉ :**

**ÉNONCÉ-24**

1) Soit  $n$  un entier strictement positif. Montrer que pour tout réel  $x > 0$ , la série de terme général  $u_n(x) = \frac{1}{n + n^2x^2}$  est convergente.

On note  $f(x)$  sa somme c'est-à-dire  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2x^2}$ .

2) a) Montrer que  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

b) On note  $I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2x^2}$ .

Montrer que  $I(x)$  existe et que

$$\forall x > 0, I(x) \leq f(x) \leq I(x) + \frac{1}{1 + x^2}.$$

3) a) Montrer qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $x > 0$  et tout  $t > 0$  :

$$\frac{1}{t(1 + tx^2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1 + tx^2}.$$

b) Calculer  $I(x)$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

c) Donner un équivalent de  $f(x)$  au voisinage de 0.

4) Soit  $x_0 > 0$ .

a) Montrer que :

$$\forall x > 0, |f(x) - f(x_0)| \leq |x^2 - x_0^2| \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{n^2}{n + n^2x^2} \right) \left( \frac{1}{n + n^2x_0^2} \right).$$

b) En déduire que :

$$\forall x > 0, |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{|x^2 - x_0^2|}{x^2} f(x_0).$$

c) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

## CORRIGE DE L'EXERCICE

### CORRIGE :

#### QUESTION-1

---

$\sum u_n(x)$  est une série à termes positifs.

Comme  $x \neq 0$ ,  $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \frac{1}{n^2}$ .

La série de terme général  $\frac{1}{n^2}$  est convergente car c'est une **série de Riemann avec  $\alpha = 2 > 1$**  ; donc la série  $\sum \frac{1}{x^2} \frac{1}{n^2}$  est convergente et d'après la règle d'équivalence des séries positives équivalentes,

la série  $\sum u_n(x)$  est convergente pour  $x \neq 0$ .

#### QUESTION-2

---

a)

$f$  est la somme de fonctions décroissantes, donc elle est décroissante.

b)

- Pour  $t \geq 1$ ,  $\frac{1}{t + x^2 t^2} \geq 0$ .

Comme  $x^2 \neq 0$ ,  $\frac{1}{t + x^2 t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \frac{1}{t^2}$ .

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  est convergente car  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est une fonction de Riemann avec  $\alpha = 2 > 1$ .

Par le théorème des équivalents de fonctions positives on conclut que

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + x^2 t^2}$  est convergente.

- Soit  $n \geq 1$ . Pour  $t \in [n; n+1]$ , on a  
 $n \leq t \leq n+1$ .

(a)

On élève au carré car **les nombres sont positifs** ;

$n^2 \leq t^2 \leq (n+1)^2$ . On multiplie par  $x^2$  **qui est positif** ;  
 $x^2 n^2 \leq x^2 t^2 \leq x^2 (n+1)^2$ .

(b)

On ajoute les inégalités (a) et (b).

$$0 < n + x^2 n^2 \leq t + x^2 t^2 \leq n + 1 + x^2 (n+1)^2.$$

Comme il s'agit de **nombres strictement positifs** on peut passer aux inverses :

$$\frac{1}{n + 1 + x^2 (n+1)^2} \leq \frac{1}{t + x^2 t^2} \leq \frac{1}{n + x^2 n^2}.$$

Intégrons entre  $n$  et  $n+1$  (**les bornes sont dans l'ordre croissant**), on obtient :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{n + 1 + x^2 (n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t + x^2 t^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n + x^2 n^2}. \text{ Soit}$$

$$\frac{1}{n + 1 + x^2 (n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t + x^2 t^2} \leq \frac{1}{n + x^2 n^2}.$$