



## EXERCICES DE MATHEMATIQUES



### ANALYSE

### ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

#### ENONCE-23

On considère les suites numériques  $(I_n)$  et  $(u_n)$  définies pour  $n \in \mathbb{N}^*$  par :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad \text{et} \quad u_n = \sqrt{n}I_n.$$

- 1) Justifier l'existence de  $I_n$  et déterminer une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$ .
- 2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est monotone et étudier sa convergence.
- 3) Pour tout  $n \geq 1$ , calculer  $I_n$ .
- 4) a) En utilisant l'inégalité  $\ln(1+x^2) \leq x^2$ ,  
montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $I_n \geq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2} dx$ .
- b) Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$  (On pourra utiliser le résultat suivant :  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ ).
- c) En déduire une minoration de la suite  $(u_n)$  et conclure que la suite  $(u_n)$  ne tend pas vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- 5) Montrer qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que :  $\binom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha 4^n}{\sqrt{n}}$ .

## CORRIGE DE L'EXERCICE

### CORRIGE :

#### QUESTION-1

• La fonction  $f_n$  définie par  $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$  est continue, dérivable sur  $\mathbb{R}$ . L'intégrale  $I_n$  est donc impropre uniquement en  $+\infty$  et  $-\infty$ . Mais la fonction  $f_n$  est paire, donc **l'intégrale  $I_n$  converge si et seulement si l'intégrale  $J_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$  converge. Dans ce cas on a  $I_n = 2J_n$ .**

Or  $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n}}$ , dont l'intégrale sur  $[1, +\infty[$  converge **d'après le critère de Riemann** puisque  $2n > 1$ .

$f_n$  est positive sur  $[1, +\infty[$ , équivalente en  $+\infty$  à une fonction dont l'intégrale sur  $[1, +\infty[$  converge ; les résultats sur les équivalents de fonctions positives permettent de conclure que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$  converge, donc l'intégrale  $J_n$  converge car sur  $[0, 1]$   $f_n$  est continue.

• Soit  $y \geq 0$  ; posons  $J_n(y) = \int_0^y f_n(t)dt$ . On a alors  $\lim_{y \rightarrow +\infty} J_n(y) = J_n$ .

Trouvons une relation de récurrence entre  $J_n$  et  $J_{n+1}$ .

Intégrons  $J_n(y)$  par parties :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^n} & ; & \quad u'(x) = -\frac{2nx}{(1+x^2)^{n+1}} \\ v'(x) &= 1 & ; & \quad v(x) = x. \end{aligned}$$

$u$  et  $v$  sont  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; y]$ .

$$\begin{aligned} J_n(y) &= \left[ \frac{x}{(1+x^2)^n} \right]_0^y + 2n \int_0^y \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n \int_0^y \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n \int_0^y \left( \frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \right) dx \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n \left( \int_0^y \frac{1}{(1+x^2)^n} dx - \int_0^y \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx \right) \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n \left( J_n(y) - J_{n+1}(y) \right) \end{aligned}$$

En prenant la limite quand  $y \rightarrow +\infty$ , on obtient la relation :  $J_n = 2n(J_n - J_{n+1})$ , soit  $J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n$ . En multipliant par 2 :

$$\forall n \geq 1, I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

#### QUESTION-2

Remarquons que  $I_n > 0$ , car  $\frac{1}{(1+x^2)^n} > 0$  et les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant ; donc  $u_n > 0$ .

page 2

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.