ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–23

On considère les suites numériques (I_n) et (u_n) définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad \text{et} \quad u_n = \sqrt{n} I_n.$$

1) Justifier l'existence de I_n et déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

2) Montrer que la suite (u_n) est monotone et étudier sa convergence.

3) Pour tout $n \geq 1$, calculer I_n.

4) a) En utilisant l'inégalité $\ln(1+x^2) \leq x^2$,

montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_n \geq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2} dx$.

b) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$ (On pourra utiliser le résultat suivant : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$).

c) En déduire une minoration de la suite (u_n) et conclure que la suite (u_n) ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

5) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : $\binom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha 4^n}{\sqrt{n}}$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION–1

• La fonction f_n définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$. L'intégrale I_n est donc impropre uniquement en $+\infty$ et $-\infty$. Mais la fonction f_n est paire, donc **l'intégrale I_n converge si et seulement si l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ converge. Dans ce cas on a** $I_n = 2J_n$.

Or $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2n}}\cdot$, dont l'intégrale sur $[1,+\infty[$ converge **d'après le critère de Riemann puisque** $2n > 1$.

> f_n est positive sur $[1,+\infty[$, équivalente en $+\infty$ à une fonction dont l'intégrale sur $[1,+\infty[$ converge ; les résultats sur les équivalents de fonctions positives permettent de conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ converge, donc l'intégrale J_n converge car sur $[0,1]$ f_n est continue.

• Soit $y \geq 0$; posons $J_n(y) = \displaystyle\int_0^y f_n(t)dt$. **On a alors** $\lim\limits_{y\to+\infty} J_n(y) = J_n$**.**

Trouvons une relation de récurrence entre J_n et J_{n+1}.

Intégrons $J_n(y)$ par parties :

$$\begin{array}{lcllcl} u(x) & = & \dfrac{1}{(1+x^2)^n} & ; & u'(x) & = & -\dfrac{2nx}{(1+x^2)^{n+1}} \\ v'(x) & = & 1 & ; & v(x) & = & x. \end{array}$$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0;y]$.

$$\begin{aligned} J_n(y) &= \left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^y + 2n\int_0^y \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n\int_0^y \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}}dx \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n\int_0^y \Big(\frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\Big)dx \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n\Big(\int_0^y \frac{1}{(1+x^2)^n}dx - \int_0^y \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}dx\Big) \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n\Big(J_n(y) - J_{n+1}(y)\Big) \end{aligned}$$

En prenant la limite quand $y \to +\infty$, on obtient la relation : $J_n = 2n\Big(J_n - J_{n+1}\Big)$, soit $J_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}J_n$. En multipliant par 2 :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n.}$$

QUESTION–2

Remarquons que $I_n > 0$, car $\dfrac{1}{(1+x^2)^n} > 0$ et les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant ; donc $u_n > 0$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.