ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−23

On considère les suites numériques (I_n) et (u_n) définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad \text{et} \quad u_n = \sqrt{n} I_n.$$

1) Justifier l'existence de I_n et déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

2) Montrer que la suite (u_n) est monotone et étudier sa convergence.

3) Pour tout $n \geq 1$, calculer I_n.

4) a) En utilisant l'inégalité $\ln(1+x^2) \leq x^2$,

montrer que pour tout $n \geq 1,\ I_n \geq \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2} dx$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$ (On pourra utiliser le résultat suivant : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$).

c) En déduire une minoration de la suite (u_n) et conclure que la suite (u_n) ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

5) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : $\displaystyle\binom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha 4^n}{\sqrt{n}}$.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION–1

• La fonction f_n définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$. L'intégrale I_n est donc impropre uniquement en $+\infty$ et $-\infty$. Mais la fonction f_n est paire, donc **l'intégrale I_n converge si et seulement si l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ converge. Dans ce cas on a** $I_n = 2J_n$.

Or $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2n}}\cdot$, dont l'intégrale sur $[1, +\infty[$ converge **d'après le critère de Riemann puisque** $2n > 1$.

> f_n est positive sur $[1, +\infty[$, équivalente en $+\infty$ à une fonction dont l'intégrale sur $[1, +\infty[$ converge ; les résultats sur les équivalents de fonctions positives permettent de conclure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ converge, donc l'intégrale J_n converge car sur $[0, 1]$ f_n est continue.

• Soit $y \geq 0$; posons $J_n(y) = \int_0^y f_n(t)dt$. **On a alors** $\lim\limits_{y \to +\infty} J_n(y) = J_n$**.**

Trouvons une relation de récurrence entre J_n et J_{n+1}.

Intégrons $J_n(y)$ par parties :

$$u(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad ; \quad u'(x) = -\frac{2nx}{(1+x^2)^{n+1}}$$
$$v'(x) = 1 \quad ; \quad v(x) = x.$$

u **et** v **sont** $\mathcal{C}^1$ **sur** $[0; y]$**.**

$$\begin{aligned}
J_n(y) &= \left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^y + 2n\int_0^y \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx \\
&= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n\int_0^y \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}}dx \\
&= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n\int_0^y \left(\frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right)dx \\
&= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n\left(\int_0^y \frac{1}{(1+x^2)^n}dx - \int_0^y \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}dx\right) \\
&= \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n\Big(J_n(y) - J_{n+1}(y)\Big)
\end{aligned}$$

En prenant la limite quand $y \to +\infty$, on obtient la relation : $J_n = 2n\Big(J_n - J_{n+1}\Big)$, soit $J_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}J_n$. En multipliant par 2 :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n.}$$

QUESTION–2

Remarquons que $I_n > 0$, car $\dfrac{1}{(1+x^2)^n} > 0$ et les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant ; donc $u_n > 0$.