



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-22

Soit x un réel strictement positif et n un entier naturel **non nul**.

1) Etudier la convergence de l'intégrale

$$I_n(x) = \int_{-\ln x}^{+\infty} e^{-nt} dt.$$

2) Etudier, suivant les valeurs de x , la convergence de la série de terme général $I_n(x)$.

3) On pose

$$J_n(x) = \int_{-\ln x}^{+\infty} \frac{1 - e^{-nt}}{1 - e^{-t}} e^{-t} dt.$$

a) Justifier la convergence de l'intégrale $J_n(x)$.

(On distinguera les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$).

b) Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = J_n(x)$.

4) On suppose ici que $x \in]0; 1[$.

a) Etudier la fonction g définie sur $[-\ln x, +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}.$$

b) Calculer $\int_{-\ln x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

CORRIGE DE L'EXERCICE
CORRIGE :
QUESTION-1

Posons $f_n(t) = e^{-nt}$, pour $t \in I = [-\ln x; +\infty[$ et $x > 0$. La fonction f_n est continue, dérivable sur I , comme composée de fonctions continues, dérivables. En effet,

$u : t \mapsto -nt$ est continue, dérivable sur I ; \exp est continue dérivable sur l'intervalle image $u(I)$, puisqu'elle est continue dérivable sur \mathbb{R} , donc $\exp \circ u$ est continue, dérivable sur I .

L'intégrale $I_n(x) = \int_{-\ln x}^{+\infty} f_n(t) dt$ est impropre en $+\infty$.

Etudions la convergence de $I_n(x)$, puis calculons-la.

- f_n est positive; d'après les croissances comparées, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_n(t)t^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{(e^t)^n} = 0. \text{ Exprimons ce résultat :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 / \forall t \geq A, |f_n(t)t^2 - 0| \leq \varepsilon.$$

Ce qui compte tenu du fait que $f_n(t)t^2 \geq 0$ s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 / \forall t \geq A, 0 \leq f_n(t)t^2 \leq \varepsilon.$$

Or pour $A > 0, t^2 > 0$; on peut diviser la dernière inégalité par t^2 ;

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 / \forall t \geq A, 0 \leq f_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{t^2}.$$

Appliquons cette inégalité pour $\varepsilon = 1$; on a

$$\exists A > 0 / \forall t \in [A; +\infty[, 0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{t^2}.$$

L'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge d'après le critère de Riemann; donc par utilisation du théorème de comparaison des fonctions positives, on conclut que l'intégrale $\int_A^{+\infty} f_n(t) dt$ converge, donc l'intégrale $\int_{-\ln x}^{+\infty} f_n(t) dt$ converge aussi (puisque sur l'intervalle $[-\ln x; A]$, f_n est continue).

Remarque : Nous avons fait la démonstration en détail, car cette situation est fréquente (il faut donc savoir la traiter) et elle utilise un résultat important du cours (les croissances comparées).

- Calcul de $I_n(x)$.

Prenons $a \geq -\ln x$ et calculons $J_n(a, x) = \int_{-\ln x}^a f_n(t) dt$.

Par définition $I_n(x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} J_n(a, x)$.

On a immédiatement

$$\begin{aligned} J_n(a, x) &= \left[-\frac{e^{-nt}}{n} \right]_{-\ln x}^a \\ &= -\frac{e^{-na}}{n} + \frac{e^{n \ln x}}{n} = -\frac{e^{-na}}{n} + \frac{x^n}{n} \end{aligned}$$

Or $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{e^{-na}}{n} = 0$, donc $I_n(x) = \frac{x^n}{n}$.

Remarque : Cette façon de faire montre (bien-sûr) que l'intégrale $I_n(x)$ converge puisque sa valeur est un nombre réel; mais il est assez rare que l'on puisse calculer une intégrale pour pouvoir décider si elle converge ou non.