EXERCICES DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–20

Soit n un entier naturel non nul. On considère une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et on définit l'application f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(0) = f(0) \quad \text{et pour } x \neq 0,\ f_n(x) = \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1} f(t)dt.$$

1) Que peut-on dire de f_n lorsque f est paire, impaire ?

2) Déterminer f_n lorsque $f(x) = |x|^a$, où $a \in \mathbb{N}^*$.

3) a) Que veut dire la proposition suivante ?

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \ /\ \forall t \in [-\alpha;\alpha],\ |f(t) - f(0)| \leq \varepsilon. \qquad \textbf{(*)}$$

b) Soit $\alpha > 0$. On considère un réel $x \neq 0$ / $|x| \leq \alpha$.

Montrer que $\forall t \in [0;x]$ (si $x > 0$) ou $t \in [x;0]$ (si $x < 0$), on a $|t| \leq \alpha$.

4) Montrer que

$$\forall x \neq 0,\ f_n(x) - f_n(0) = \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}(f(t) - f(0))dt.$$

5) a) Montrer que, pour $x > 0$, on a

$$|f_n(x) - f_n(0)| \leq \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}|f(t) - f(0)|dt.$$

En déduire que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha_1 > 0 \ /\ \forall x \in]0;\alpha_1],\ |f_n(x) - f_n(0)| \leq \varepsilon.$$

b) Montrer que pour $x < 0$, on a

$$|f_n(x) - f_n(0)| \leq \frac{n}{|x^n|}\int_x^0 |t|^{n-1}|f(t) - f(0)|dt.$$

En déduire que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha_2 > 0 \ /\ \forall x \in [-\alpha_2;0[,\ |f_n(x) - f_n(0)| \leq \varepsilon.$$

c) En déduire que f_n est continue en 0.

6) On suppose de plus que f est dérivable en 0. Montrer qu'il existe une fonction continue ε_1 telle que :

$$\forall x \neq 0,\ \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \frac{n}{n+1}f'(0) + \frac{n}{x^{n+1}}\int_0^x t^n \varepsilon_1(t)dt.$$

En déduire ${f_n}'(0)$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION–1

Effectuons le changement de variable $\mathcal{C}^1$: $t = -u$.

$$\forall x \neq 0,\ f_n(x) = \frac{n}{x^n}\int_0^{-x}(-u)^{n-1}f(-u)(-du) = (-1)^n\frac{n}{x^n}\int_0^{-x}u^{n-1}f(-u)du$$
$$= \frac{n}{(-x)^n}\int_0^{-x}u^{n-1}f(-u)du.$$

- Si f est paire, $f(-u) = f(u)$ et l'égalité précédente donne :

$f_n(x) = \frac{n}{(-x)^n}\int_0^{-x}u^{n-1}f(u)du = f_n(-x)$. Or $f_n(0) = f_n(-0) = f(0)$.

Donc $\boxed{f \text{ paire implique } f_n \text{ paire,}}$

- On montre de même que $\boxed{f \text{ impaire implique } f_n \text{ impaire.}}$

On aura remarqué que $f(0) = -f(0) = 0$ si f est impaire.

QUESTION–2

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire. On calculera $f_n(x)$ pour $x > 0$.

$$f_n(x) = \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}t^a dt = \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1+a}dt$$
$$= \frac{n}{n+a}\frac{1}{x^n}x^{n+a} = \frac{n}{n+a}x^a$$

Comme f_n est paire, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_n(x) = \frac{n}{n+a}|x|^a.}$

On vérifie que $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0 = f(0)$.

QUESTION–3

a)

La proposition exprime que f est continue au point 0.

b)

Si $x > 0,\ 0 \leq t \leq x \Longrightarrow |t| \leq |x| \leq |\alpha|$.

Si $x < 0,\ x \leq t \leq 0 \Longleftrightarrow 0 \leq -t \leq -x$ (on a multiplié par -1), donc $|t| \leq |x|$.

$\boxed{\text{Dans les deux cas on a } |t| \leq |\alpha|.}$

QUESTION–4

Remarquons que $\frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}dt = \frac{n}{x^n}\left[\frac{t^n}{n}\right]_0^x = 1$. donc

$$f_n(x) - f_n(0) = \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}f(t)dt - f_n(0)\frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}dt$$
$$= \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}(f(t) - f(0))dt.$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.