



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-20

Soit n un entier naturel non nul. On considère une application f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continue et on définit l'application f_n de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$f_n(0) = f(0) \text{ et pour } x \neq 0, f_n(x) = \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} f(t) dt.$$

- 1) Que peut-on dire de f_n lorsque f est paire, impaire ?
- 2) Déterminer f_n lorsque $f(x) = |x|^a$, où $a \in \mathbb{N}^*$.
- 3) a) Que veut dire la proposition suivante ?

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall t \in [-\alpha; \alpha], |f(t) - f(0)| \leq \varepsilon. \quad (*)$$

b) Soit $\alpha > 0$. On considère un réel $x \neq 0 / |x| \leq \alpha$.

Montrer que $\forall t \in [0; x]$ (si $x > 0$) ou $t \in [x; 0]$ (si $x < 0$), on a $|t| \leq \alpha$.

4) Montrer que

$$\forall x \neq 0, f_n(x) - f_n(0) = \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} (f(t) - f(0)) dt.$$

5) a) Montrer que, pour $x > 0$, on a

$$|f_n(x) - f_n(0)| \leq \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} |f(t) - f(0)| dt.$$

En déduire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_1 > 0 / \forall x \in]0; \alpha_1], |f_n(x) - f_n(0)| \leq \varepsilon.$$

b) Montrer que pour $x < 0$, on a

$$|f_n(x) - f_n(0)| \leq \frac{n}{|x^n|} \int_x^0 |t|^{n-1} |f(t) - f(0)| dt.$$

En déduire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_2 > 0 / \forall x \in [-\alpha_2; 0[, |f_n(x) - f_n(0)| \leq \varepsilon.$$

c) En déduire que f_n est continue en 0.

6) On suppose de plus que f est dérivable en 0. Montrer qu'il existe une fonction continue ε_1 telle que :

$$\forall x \neq 0, \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \frac{n}{n+1} f'(0) + \frac{n}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \varepsilon_1(t) dt.$$

En déduire $f_n'(0)$.

CORRIGE DE L'EXERCICE
CORRIGE :
QUESTION-1

Effectuons le changement de variable $\mathcal{C}^1 : t = -u$.

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0, f_n(x) &= \frac{n}{x^n} \int_0^{-x} (-u)^{n-1} f(-u) (-du) = (-1)^n \frac{n}{x^n} \int_0^{-x} u^{n-1} f(-u) du \\ &= \frac{n}{(-x)^n} \int_0^{-x} u^{n-1} f(-u) du. \end{aligned}$$

- Si f est paire, $f(-u) = f(u)$ et l'égalité précédente donne :

$$f_n(x) = \frac{n}{(-x)^n} \int_0^{-x} u^{n-1} f(u) du = f_n(-x). \text{ Or } f_n(0) = f_n(-0) = f(0).$$

Donc f paire implique f_n paire,

- On montre de même que f impaire implique f_n impaire.

On aura remarqué que $f(0) = -f(0) = 0$ si f est impaire.

QUESTION-2

La fonction f est continue sur \mathbb{R} et paire. On calculera $f_n(x)$ pour $x > 0$.

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} t^a dt = \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1+a} dt \\ &= \frac{n}{n+a} \frac{1}{x^n} x^{n+a} = \frac{n}{n+a} x^a \end{aligned}$$

Comme f_n est paire, $\forall x \in \mathbb{R}^*, f_n(x) = \frac{n}{n+a} |x|^a$.

On vérifie que $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0 = f(0)$.

QUESTION-3

a)

La proposition exprime que f est continue au point 0.

b)

Si $x > 0$, $0 \leq t \leq x \implies |t| \leq |x| \leq |\alpha|$.

Si $x < 0$, $x \leq t \leq 0 \iff 0 \leq -t \leq -x$ (on a multiplié par -1), donc $|t| \leq |x|$.

Dans les deux cas on a $|t| \leq |\alpha|$.

QUESTION-4

Remarquons que $\frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} dt = \frac{n}{x^n} \left[\frac{t^n}{n} \right]_0^x = 1$. donc

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_n(0) &= \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} f(t) dt - f_n(0) \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} dt \\ &= \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} (f(t) - f(0)) dt. \end{aligned}$$