EXERCICES DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–19

On définit la fonction g par :

$$g(x) = \frac{\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de g et montrer que g se prolonge par continuité en 0 ; on notera f ce prolongement.

2) Montrer que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et étudier la position de la courbe Γ représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.

3) Etudier les variations de f

4) a) Montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in]-1, +\infty[-\{0\}, \quad \frac{1}{(1+x)x^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1}.$$

b) Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$, l'axe des abscisses et la courbe Γ.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION–1

$D_g =]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to -1_+} g(x) = +\infty$, car le numérateur tend vers $-\infty$ et le dénominateur vers -1.

La limite de g en 0 est indéterminée "$\frac{0}{0}$". Pour lever l'indétermination, effectuons un développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0, à l'ordre 3 à cause du dénominateur.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_0 \varepsilon(x) = 0$. Donc

$$g(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{3} + \varepsilon(x).$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{3}.}$$

La fonction g se prolonge par continuité en 0 en une application f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \textbf{pour } x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ \frac{1}{3} & \textbf{pour } x = 0. \end{cases}$$

QUESTION–2

f est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$, comme quotient de fonctions dérivables, dont le dénominateur ne s'annule pas.

- **Dérivabilité en 0 :** revenons à la définition et étudions le taux d'accroissement $T(x)$ de f au voisinage de 0.

$$T(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{3\ln(1+x) - 3x + \frac{3x^2}{2} - x^3}{3x^4}.$$

Effectuons un DL de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0, à l'ordre 4 à cause du dénominateur qui est en x^4.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon_1(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

Il vient alors

$$T(x) = \frac{3x - \frac{3x^2}{2} + x^3 - \frac{3x^4}{4} + 3x^4\varepsilon_1(x) - 3x + \frac{3x^2}{2} - x^3}{3x^4}$$

$$= -\frac{1}{4} + \varepsilon_1(x).$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{4}$.

L'équation de la tangente au point de coordonnées $(0, \frac{1}{3})$ est

$$y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}(x-0), \text{ soit } y = -\frac{x}{4} + \frac{1}{3}.$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.