



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



## ANALYSE

## ENONCE DE L'EXERCICE

## ENONCE :

## ENONCE-18

1) Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

Montrer que l'intégrale  $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} dx$  est convergente.

2) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx$ .

Montrer que la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  est convergente.

3) a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

b) En déduire l'existence et la nature de la série de terme général  $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$ , puis la limite de la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$ .

4) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $J_n = \sqrt{n} I_n$  et  $K_n = \sqrt{n+1} I_n$ .

a) Montrer que les suites  $(J_n)_{n \geq 0}$  et  $(K_n)_{n \geq 0}$  sont adjacentes.

b) En déduire qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{n}}.$$

5) a) Calculer  $I_n$  en fonctions de  $n$ .

b) En admettant que  $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$  (formule de Stirling),

montrer que  $I_n \underset{+\infty}{\sim} e \left( \frac{2n}{2n+1} \right)^{2n+1} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$ .

c) Déterminer la valeur de  $\alpha$ .

**CORRIGE DE L'EXERCICE**
**CORRIGE :**
**QUESTION-1**


---

La fonction  $f$  est continue sur  $[0; 1]$ , donc sa valeur absolue  $|f|$  est majorée sur  $[0; 1]$  par un réel que nous noterons  $M$ .

Nous avons donc :  $\forall t \in [0; 1], 0 \leq |f(t)| \leq M$ .

Multiplions cet encadrement par  $\frac{1}{\sqrt{1-t}} > 0$  ; on obtient :

$$\forall t \in [0; 1[, 0 \leq \frac{|f(t)|}{\sqrt{1-t}} \leq \frac{M}{\sqrt{1-t}}.$$

L'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$  est impropre en 1 car  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$  est continue sur  $[0; 1[$ . Elle est convergente car  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$  est une fonction de référence sur  $[0; 1[$  de la forme  $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^\alpha}$  avec  $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ .

Donc l'intégrale  $\int_0^1 \frac{M dt}{\sqrt{1-t}}$  est convergente.

**Le théorème de comparaison des fonctions positives** permet de conclure que l'intégrale  $\int_0^1 \frac{|f(t)| dt}{\sqrt{1-t}}$  est convergente.

Cela veut dire que **l'intégrale  $\int_0^1 \frac{f(t) dt}{\sqrt{1-t}}$  est absolument convergente, donc convergente.**

**QUESTION-2**


---

Remarquons que les fonctions  $t \mapsto t^k$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ , sont continues sur  $[0; 1]$ , donc d'après la question 1) les intégrales  $I_k$  sont convergentes.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{t^{n+1} dt}{\sqrt{1-t}} - \int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{1-t}} \\ &= \int_0^1 \frac{t^n(t-1) dt}{\sqrt{1-t}}. \end{aligned}$$

Or sur  $[0; 1[$ ,  $\frac{t^n(t-1) dt}{\sqrt{1-t}} \leq 0$  ; **les bornes étant dans l'ordre croissant**, on conclut que

$$\int_0^1 \frac{t^n(t-1) dt}{\sqrt{1-t}} \leq 0, \text{ donc } I_{n+1} - I_n \leq 0.$$

La suite  $(I_n)$  est décroissante. Elle est minorée par 0 : le théorème des suites monotones bornées permet de conclure que la suite  $(I_n)$  est convergente.

**QUESTION-3**


---

a)

page 2

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.