ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−16

Croissances comparées, écriture de limite

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln k)^3$.

1) Déterminer un encadrement de u_n à l'aide de deux intégrales de la fonction $\varphi : t \longmapsto (\ln t)^3$.

2) Calculer ces deux intégrales et en déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ où $v_n = n(\ln n)^3$.

3) a) En utilisant le résultat de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^3}{\sqrt{n}}$, majorer $\dfrac{(\ln n)^3}{n^2}$.

b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{u_n}{n^3}$ est convergente.

4) On considère maintenant la suite (w_n) de terme général $w_n = u_n - v_n$.

Après avoir justifié que $w_n = \sum_{k=2}^{n} (w_k - w_{k-1})$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION−1

Remarque : $u_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln k)^3 = \sum_{k=2}^{n} (\ln k)^3$.

Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

Par croissance de $\varphi, \forall t \in [k, k+1],\ \varphi(k) \leq \varphi(t) \leq \varphi(k+1)$. En intégrant entre k et $k+1$ (**bornes dans le sens croissant**), on obtient l'encadrement

$\varphi(k) \leq \int_k^{k+1} \varphi(t)dt \leq \varphi(k+1)$. Ecrivons-le au rang précédent,

$\varphi(k-1) \leq \int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt \leq \varphi(k)$. Par comparaison des deux encadrements, on obtient l'encadrement de $\varphi(k)$ suivant :

$$\int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt \leq \varphi(k) \leq \int_k^{k+1} \varphi(t)dt, \text{ pour } k \geq 2.$$

Sommons ces encadrements pour k variant de 2 à n ;

$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt \leq \sum_{k=2}^{n} \varphi(k) \leq \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \varphi(t)dt$, soit en utilisant la relation de Chasles,

$$\boxed{\int_1^n \varphi(t)dt \leq u_n \leq \int_2^{n+1} \varphi(t)dt. \qquad \textbf{(1)}}$$

QUESTION−2

- Calcul de $I(x) = \int_1^x \varphi(t)dt$ par parties pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} u(t) &= (\ln t)^3 \quad ; \quad u'(t) = \frac{3(\ln t)^2}{t} \\ v'(t) &= 1 \quad ; \quad v(t) = t, \end{aligned}$$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1; x]$ si $1 \leq x$ ou $[x; 1]$ si $x \leq 1$.

$$\begin{aligned} I(x) &= \left[t(\ln t)^3\right]_1^x - 3\int_1^x (\ln t)^2 dt \\ &= x(\ln x)^3 - 3\underbrace{\int_1^x (\ln t)^2 dt}_{J(x)} \end{aligned}$$

- Calcul de $J(x)$ par parties :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= (\ln t)^2 \quad ; \quad u_1{}'(t) = \frac{2(\ln t)}{t} \\ v_1{}'(t) &= 1 \quad ; \quad v_1(t) = t, \end{aligned}$$

u_1 et v_1 sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1; x]$ si $1 \leq x$ ou $[x; 1]$ si $x \leq 1$.

$$\begin{aligned} J(x) &= \left[t(\ln t)^2\right]_1^x - 2\int_1^x (\ln t)dt \\ &= x(\ln x)^2 - 2\left[t\ln t - t\right]_1^x \\ &= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x + 1). \end{aligned}$$

Revenons à $I(x)$; en substituant, on a :