# ANALYSE

## ENONCE DE L'EXERCICE

## ENONCE :

### ENONCE–15

**1)** On considère la fonction $\varphi$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}.$$

**a)** Justifier l'existence sur $\mathbb{R}$ d'une primitive de $\varphi$, que l'on notera $\Phi$.

**b)** On considère l'application $g$ définie sur $I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$g(u) = \Phi(\frac{1 + \tan u}{2}).$$

Prouver que $g$ est dérivable sur $I$ et montrer que $g$ est une fonction affine.

**c)** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)dt$.

**2)** Soit $p$ et $q$ deux entiers naturels. On pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

**a)** Déterminer une relation entre $I(p+1, q+1)$ et $I(p+2, q)$.

**b)** En déduire $I(n,n)$ en fonction de $n$.

**3)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{2^n}{(2n+1)\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}}$.

**a)** Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

**b)** Simplifier l'expression $\dfrac{1}{2t^2 - 2t - 1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k t^k (1-t)^k$, pour $t \in [0;1]$.

En déduire la convergence de la série de terme général $v_n$ et calculer sa somme.


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.