



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



### ANALYSE

### ENONCE DE L'EXERCICE

**ENONCE :**

#### ENONCE-14

On considère pour  $n \geq 2$  la suite de fonctions  $(P_n)$  définies sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, P_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k-1}. \text{ Pour } x = 0 \text{ et } k = 1, \text{ on pose } 0^0 = 1.$$

- 1) Montrer que l'équation  $P_n(x) = 2$  admet sur  $\mathbb{R}_+$  une unique solution que l'on notera  $x_n$  ; situer  $x_n$  entre deux entiers consécutifs.
- 2) a) Donner une relation entre  $P_{n+1}(x)$  et  $P_n(x)$ .
- b) Etudier les variations de la suite  $(x_n)$ . En déduire que cette suite est convergente. On notera  $\ell$  sa limite.
- 3) Vérifier que, pour tout réel  $x$  et tout  $n \geq 2$ , on a l'égalité :

$$(x-1)^2 \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k-1} = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1.$$

- 4) Etablir l'égalité suivante :

$$\ln x_n = \frac{\ln(-1 + 4x_n - 2x_n^2)}{n} - \frac{\ln(n+1 - nx_n)}{n}.$$

On justifiera que  $-1 + 4x_n - 2x_n^2 > 0$  et que  $n+1 - nx_n > 0$ .

- 5) a) En encadrant  $x_n$ , montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1 - nx_n)}{n} = 0$ .

- b) Montrer que nécessairement  $-1 + 4\ell - 2\ell^2 \geq 0$ .

En supposant que  $-1 + 4\ell - 2\ell^2 > 0$ , montrer qu'on obtient alors  $\ell = 1$ . Conclure à une absurdité.

- c) En déduire la valeur de  $\ell$ .