ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–14

On considère pour $n \geq 2$ la suite de fonctions (P_n) définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ P_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k-1}.$$ Pour $x = 0$ et $k = 1$, on pose $0^0 = 1$.

1) Montrer que l'équation $P_n(x) = 2$ admet sur $\mathbb{R}_+$ une unique solution que l'on notera x_n ; situer x_n entre deux entiers consécutifs.

2) a) Donner une relation entre $P_{n+1}(x)$ et $P_n(x)$.

b) Etudier les variations de la suite (x_n). En déduire que cette suite est convergente. On notera ℓ sa limite.

3) Vérifier que, pour tout réel x et tout $n \geq 2$, on a l'égalité :

$$(x-1)^2 \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k-1} = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1.$$

4) Etablir l'égalité suivante :

$$\ln x_n = \frac{\ln(-1 + 4x_n - 2x_n^2)}{n} - \frac{\ln(n+1-nx_n)}{n}.$$

On justifiera que $-1 + 4x_n - 2x_n^2 > 0$ et que $n + 1 - nx_n > 0$.

5) a) En encadrant x_n, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1-nx_n)}{n} = 0$.

b) Montrer que nécessairement $-1 + 4\ell - 2\ell^2 \geq 0$.

En supposant que $-1 + 4\ell - 2\ell^2 > 0$, montrer qu'on obtient alors $\ell = 1$. Conclure à une absurdité.

c) En déduire la valeur de ℓ.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.