CODE SUJET :
295
EML_MATS

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EM LYON

Première épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril 2007 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Premier problème

On considère l'application

$$f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie I
Étude de l'application f

1. Montrer que f est continue sur $[0\,;+\infty[$.

2. On considère l'application

$$A : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

a. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{A(x)}{x^2}$.

b. Montrer que f' admet $-\dfrac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.

c. Démontrer que f est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$ et préciser $f'(0)$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

d. Dresser le tableau de variation de A.

En déduire que f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

e. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On considère l'application

$$B : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x).$$

a. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et que, pour tout $x \in\ ]0\,;+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{B(x)}{x^3}$.

b. Dresser le tableau de variation de B.

En déduire que f est convexe sur $]0\,;+\infty[$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II

Un développement en série

1. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0\,;1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$

où on a noté $J_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

3. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$: $\quad |J_N(x)| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$.

4. En déduire que, pour tout $x \in [0\,;1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Partie III

Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

1. Montrer, en utilisant le résultat de **II.3.**, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leqslant \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

3. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}. \end{cases}$$

4. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$ Montrer : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}\cdot$

Partie IV

Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $F \ : \ ]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

et $G \ : \ ]0\,;+\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto G(x,y) = F(xy) - F(x) - F(y).$

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[^2$.
Exprimer, pour tout $(x,y) \in \ ]0\,;+\infty[^2$, les dérivées partielles premières et secondes de G en (x,y) en fonction de x, y, $f(x)$, $f(y)$, $f(xy)$, $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(xy)$.

2. Établir que G admet $(1\,,1)$ comme unique point critique.

3. Est-ce que G admet un extremum local ?

Deuxième problème

On note n un nombre entier fixé supérieur ou égal 2, E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$ la base canonique de E.

Partie I

Étude d'un endomorphisme de E

1. Montrer que, pour tout polynôme P de E, le polynôme $\big((\mathrm{X}^2-1)P\big)''$ est élément de E, où $\big((\mathrm{X}^2-1)P\big)''$ désigne le polynôme dérivée seconde de $(\mathrm{X}^2-1)P$.

On note $\phi \ : \ E \longrightarrow E$ l'application qui, à tout polynôme P de E, associe $\phi(P) = \big((\mathrm{X}^2-1)P\big)''$.

2. Vérifier : $\phi(1) = 2, \quad \phi(\mathrm{X}) = 6\mathrm{X}$.

3. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.

4. Calculer $\phi(\mathrm{X}^k)$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ et écrire la matrice A de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

5. **a.** Montrer que ϕ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes que l'on notera $\lambda_0,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.

b. Est-ce que ϕ est bijectif ?

c. Montrer que ϕ est diagonalisable et déterminer, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, la dimension du sous-espace propre de ϕ associé à λ_k.

6. Soient $k \in \{0, \ldots, n\}$ et P un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k.

a. Montrer que le degré du polynôme P est égal à k.

b. Montrer que le polynôme Q défini par $Q(\mathrm{X}) = P(-\mathrm{X})$ est un vecteur propre de ϕ associé à λ_k.

7. En déduire qu'il existe une unique base $(P_0,\ P_1, \ldots,\ P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de ϕ telle que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, P_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-\mathrm{X}) = (-1)^k P_k(\mathrm{X})$.
Que peut-on en déduire sur la parité de P_k ?

8. Calculer $P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3$.

Partie II

Un produit scalaire sur E

1. Montrer que l'application : $(P, Q) \longmapsto (P \,|\, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2) P(x) Q(x)\, \mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E.

On munit dorénavant E de ce produit scalaire noté $(. \,|\, .)$.

2. **a.** À l'aide d'intégrations par parties, établir que ϕ est un endomorphisme symétrique de E.

b. Montrer que la base $(P_0,\ P_1, \ldots,\ P_n)$ de E obtenue à la question **I.7** est orthogonale.

Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$.

3. **a.** Montrer que pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à $j-1$, on a : $(S \,|\, P_j) = 0$.

b. En considérant $(1 \,|\, P_j)$, montrer que P_j ne garde pas un signe constant sur l'intervalle $]-1;\ 1[$.

c. En déduire que P_j admet au moins, dans l'intervalle $]-1\,;\,1[$, une racine d'ordre de multiplicité impair.

4. On note $\{x_1, \ldots, x_m\}$ l'ensemble des racines d'ordre de multiplicité impair de P_j appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,1[$ et $S_m = (\mathrm{X} - x_1)(\mathrm{X} - x_2) \cdots (\mathrm{X} - x_m)$.

a. Justifier : $m \leqslant j$.

b. Montrer que le polynôme $S_m P_j$ (produit des polynômes S_m et P_j) garde un signe constant sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$.

c. En considérant $(S_m \,|\, P_j)$, montrer que $m = j$.

d. En déduire que P_j admet j racines simples réelles toutes situées dans l'intervalle $]-1\,;\,1[$.

★ ★ ★

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2007

EM LYON 2007 VOIE S

CORRIGE

PROBLEME I

PARTIE I : Etude de l'application f

1)

C'est un résultat du cours qui vient de l'équivalence $\ln(1+x) \underset{(0)}{\sim} x$.

2.a)

Sur $]0,+\infty[$, la fonction f est de classe C^1 comme produit de fonctions de classe C^1, à savoir :

$x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas et $x \longmapsto \ln(1+x)$ qui est la composée de $x \longmapsto 1+x$, qui est C^1 sur $[0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de $\ln$ qui est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \geq 0,\ f'(x) = \frac{1}{x^2}(-\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}) = \frac{A(x)}{x^2}$

2.b)

$A(x) = x(1-x+o(x)) - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Donc $f'(x) = -\frac{1}{2} + o(1)$. Cela implique $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$

2.c)

La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$ (pour les mêmes raisons que celles invoquées dans la question 2.a)), de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to 0_+} f'(x) = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0,+\infty[\text{ et } f'_d(0) = -\frac{1}{2}}$$

2.d)

$\forall x \geq 0,\ A'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2} \leq 0$. La fonction A est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $A(0) = 0$, donc $A(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, nulle uniquement en 0.

$$\boxed{\begin{array}{c} f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}, \text{ donc } f'(x) \leq 0 \text{ et nulle uniquement en } 0 : \\ f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+ \end{array}}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

2.e)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 0$ par croissances comparées.

3.a)

La même argumentation que dans la question 2–a) montre que f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en particulier deux fois dérivable.

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ f''(x) &= \frac{1}{x^4}\Big(x^2A'(x)-2xA(x)\Big)\\ &= \frac{1}{x^3}\Big(xA'(x)-2A(x)\Big)\\ &= \frac{1}{x^3}\Big(\frac{-x^2}{(1+x)^2}-2(\frac{x}{1+x}-\ln(1+x))\Big)\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall x>0,\ f''(x)=\dfrac{1}{x^3}\Big(-\dfrac{x^2+2x(1+x)}{(1+x)^2}+2\ln(1+x)\Big)=\dfrac{B(x)}{x^3}\\ \text{avec } B(x)=-\dfrac{3x^2+2x}{(1+x)^2}+2\ln(1+x)\end{array}}$$

3.b)

B est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}\forall x\geq 0,\ B'(x) &= -\frac{(1+x)^2(6x+2)-2(1+x)(3x^2+2x)}{(1+x)^4}+\frac{2}{1+x}\\ &= -\frac{(1+x)(6x+2)-2(3x^2+2x)}{(1+x)^3}+\frac{2}{1+x}\\ &= 2\Big(-\frac{(1+x)(3x+1)-3x^2-2x}{(1+x)^3}+\frac{(1+x)^2}{(1+x)^3}\Big)\\ &= \frac{2x^2}{(1+x)^3}\end{aligned}$$

x	0		$+\infty$
$B'(x)$		$+$	
B	0	$\nearrow$	

Il apparaît clairement sur le tableau que $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ B(x)\geq 0$.

$$\boxed{f''(x)=\frac{B(x)}{x^3} \text{ et } \forall x\in\mathbb{R}_+,\ B(x)\geq 0 \Longrightarrow f''(x)\geq 0 : \text{la fonction } f \text{ est convexe}}$$

4)

On obtient le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	
f	1	$\searrow$	0

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.