CODE SUJET :

295

EML_MATS

# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

## Concepteur : EM LYON

Première épreuve (option scientifique)

# MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril 2007 de 8 heures à 12 heures

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

## PREMIER PROBLÈME

On considère l'application

$$f : [0\,;+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } \ x > 0 \\ 1 & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$

### Partie I
### Étude de l'application $f$

**1.** Montrer que $f$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.

**2.** On considère l'application

$$A : [0\,;+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

**a.** Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{A(x)}{x^2}$.

**b.** Montrer que $f'$ admet $-\dfrac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.

**c.** Démontrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $[0\,;+\infty[$ et préciser $f'(0)$.

**d.** Dresser le tableau de variation de $A$.

En déduire que $f$ est strictement décroissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

**e.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

**3.** On considère l'application

$$B : \left[0\,;+\infty\right[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x).$$

**a.** Montrer que $f$ est deux fois dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$, et que, pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$, $f''(x) = \dfrac{B(x)}{x^3}$.

**b.** Dresser le tableau de variation de $B$.

En déduire que $f$ est convexe sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

**4.** Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$.

## Partie II

## Un développement en série

**1.** Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0\,;1]$ :

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

**2.** En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$ :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$

où on a noté $J_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

**3.** Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$ : $\quad |J_N(x)| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$.

**4.** En déduire que, pour tout $x \in [0\,;1]$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

## Partie III

## Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

**1.** Montrer, en utilisant le résultat de **II.3.**, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$ :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leqslant \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

**2.** Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\quad \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

**3.** Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}. \end{cases}$$

**4.** On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.

## Partie IV

### Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $F \,:\, ]0\,;+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

et $G \,:\, ]0\,;+\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto G(x,y) = F(xy) - F(x) - F(y)$.

**1.** Montrer que $G$ est de classe $C^2$ sur $]0\,;+\infty[^2$.
Exprimer, pour tout $(x,y) \in\ ]0\,;+\infty[^2$, les dérivées partielles premières et secondes de $G$ en $(x,y)$ en fonction de $x$, $y$, $f(x)$, $f(y)$, $f(xy)$, $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(xy)$.

**2.** Établir que $G$ admet $(1\,,1)$ comme unique point critique.

**3.** Est-ce que $G$ admet un extremum local ?

# Deuxième problème

On note $n$ un nombre entier fixé supérieur ou égal 2, $E$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ et $\mathcal{B} = (1,\, \mathrm{X},\, \ldots, \mathrm{X}^n)$ la base canonique de $E$.

## Partie I

### Étude d'un endomorphisme de $E$

**1.** Montrer que, pour tout polynôme $P$ de $E$, le polynôme $\big((\mathrm{X}^2-1)P\big)''$ est élément de $E$, où $\big((\mathrm{X}^2-1)P\big)''$ désigne le polynôme dérivée seconde de $(\mathrm{X}^2-1)P$.

On note $\phi \,:\, E \longrightarrow E$ l'application qui, à tout polynôme $P$ de $E$, associe $\phi(P) = \big((\mathrm{X}^2-1)P\big)''$.

**2.** Vérifier : $\phi(1) = 2,\ \ \phi(\mathrm{X}) = 6\mathrm{X}$.

**3.** Montrer que $\phi$ est un endomorphisme de $E$.

**4.** Calculer $\phi(\mathrm{X}^k)$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ et écrire la matrice $A$ de $\phi$ dans la base $\mathcal{B}$.

5. **a.** Montrer que $\phi$ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes que l'on notera $\lambda_0,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.

   **b.** Est-ce que $\phi$ est bijectif ?

   **c.** Montrer que $\phi$ est diagonalisable et déterminer, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, la dimension du sous-espace propre de $\phi$ associé à $\lambda_k$.

6. Soient $k \in \{0, \ldots, n\}$ et $P$ un vecteur propre de $\phi$ associé à la valeur propre $\lambda_k$.

   **a.** Montrer que le degré du polynôme $P$ est égal à $k$.

   **b.** Montrer que le polynôme $Q$ défini par $Q(\mathrm{X}) = P(-\mathrm{X})$ est un vecteur propre de $\phi$ associé à $\lambda_k$.

7. En déduire qu'il existe une unique base $(P_0,\ P_1, \ldots,\ P_n)$ de $E$ constituée de vecteurs propres de $\phi$ telle que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $P_k$ est un polynôme de degré $k$, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-\mathrm{X}) = (-1)^k P_k(\mathrm{X})$.
   Que peut-on en déduire sur la parité de $P_k$ ?

8. Calculer $P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3$.

## Partie II

## Un produit scalaire sur $E$

1. Montrer que l'application : $(P, Q) \longmapsto (P \,|\, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur $E$.

On munit dorénavant $E$ de ce produit scalaire noté $(.\,|\,.)$.

2. **a.** À l'aide d'intégrations par parties, établir que $\phi$ est un endomorphisme symétrique de $E$.

   **b.** Montrer que la base $(P_0,\ P_1, \ldots,\ P_n)$ de $E$ obtenue à la question **I.7** est orthogonale.

Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$.

3. **a.** Montrer que pour tout polynôme $S$ de degré inférieur ou égal à $j-1$, on a : $(S \,|\, P_j) = 0$.

   **b.** En considérant $(1 \,|\, P_j)$, montrer que $P_j$ ne garde pas un signe constant sur l'intervalle $\left]-1; 1\right[$.

   **c.** En déduire que $P_j$ admet au moins, dans l'intervalle $\left]-1\,; 1\right[$, une racine d'ordre de multiplicité impair.

4. On note $\{x_1, \ldots, x_m\}$ l'ensemble des racines d'ordre de multiplicité impair de $P_j$ appartenant à l'intervalle $\left]-1\,; 1\right[$ et $S_m = (\mathrm{X}-x_1)(\mathrm{X}-x_2)\cdots(\mathrm{X}-x_m)$.

   **a.** Justifier : $m \leqslant j$.

   **b.** Montrer que le polynôme $S_m P_j$ (produit des polynômes $S_m$ et $P_j$) garde un signe constant sur l'intervalle $\left]-1\,; 1\right[$.

   **c.** En considérant $(S_m \,|\, P_j)$, montrer que $m = j$.

   **d.** En déduire que $P_j$ admet $j$ racines simples réelles toutes situées dans l'intervalle $\left]-1\,; 1\right[$.

★ ★ ★

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2007

# EM LYON 2007 VOIE S

CORRIGE

## PROBLEME I

### PARTIE I : Etude de l'application $f$

**1)**
C'est un résultat du cours qui vient de l'équivalence $\ln(1+x) \underset{(0)}{\sim} x$.

**2.a)**
Sur $]0,+\infty[$, la fonction $f$ est de classe $C^1$ comme produit de fonctions de classe $C^1$, à savoir :
$x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas et $x \longmapsto \ln(1+x)$ qui est la composée de $x \longmapsto 1+x$, qui est $C^1$ sur $[0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de $\ln$ qui est $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \geq 0,\ f'(x) = \frac{1}{x^2}(-\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}) = \frac{A(x)}{x^2}$

**2.b)**
$A(x) = x(1-x+o(x)) - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Donc $f'(x) = -\frac{1}{2} + o(1)$. Cela implique $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$

**2.c)**
La fonction $f$ est continue sur $[0,+\infty[$ (pour les mêmes raisons que celles invoquées dans la question 2.a)), de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\lim_{x\to 0_+} f'(x) = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0,+\infty[ \text{ et } f'_d(0) = -\frac{1}{2}}$$

**2.d)**
$\forall x \geq 0,\ A'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2} \leq 0$. La fonction $A$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $A(0) = 0$, donc $A(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, nulle uniquement en $0$.

$$\boxed{\begin{array}{c} f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}, \text{ donc } f'(x) \leq 0 \text{ et nulle uniquement en } 0 : \\ f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+ \end{array}}$$

**2.e)**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 0$ par croissances comparées.

**3.a)**

La même argumentation que dans la question 2–a) montre que $f$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en particulier deux fois dérivable.

$$\begin{aligned} \forall x>0,\ f''(x) &= \frac{1}{x^4}\Big(x^2A'(x) - 2xA(x)\Big) \\ &= \frac{1}{x^3}\Big(xA'(x) - 2A(x)\Big) \\ &= \frac{1}{x^3}\Big(\frac{-x^2}{(1+x)^2} - 2(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x))\Big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall x>0,\ f''(x) = \dfrac{1}{x^3}\Big(-\dfrac{x^2+2x(1+x)}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x)\Big) = \dfrac{B(x)}{x^3} \\ \text{avec } B(x) = -\dfrac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x) \end{array}}$$

**3.b)**

$B$ est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \forall x\geq 0,\ B'(x) &= -\frac{(1+x)^2(6x+2) - 2(1+x)(3x^2+2x)}{(1+x)^4} + \frac{2}{1+x} \\ &= -\frac{(1+x)(6x+2) - 2(3x^2+2x)}{(1+x)^3} + \frac{2}{1+x} \\ &= 2\Big(-\frac{(1+x)(3x+1) - 3x^2 - 2x}{(1+x)^3} + \frac{(1+x)^2}{(1+x)^3}\Big) \\ &= \frac{2x^2}{(1+x)^3} \end{aligned}$$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $B'(x)$ | | $+$ | |
| $B$ | $0$ | $\nearrow$ | |

Il apparaît clairement sur le tableau que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ B(x) \geq 0$.

$$\boxed{f''(x) = \frac{B(x)}{x^3} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ B(x) \geq 0 \Longrightarrow f''(x) \geq 0 : \text{la fonction } f \text{ est convexe}}$$

**4)**

On obtient le tableau suivant :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | $-$ | |
| $f$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

 