BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE SUJET :
283
CCIP_M2_S

Conceptions : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 9 Mai 2007, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Pour toute variable aléatoire réelle Y définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et possédant une espérance mathématique, on note $E(Y)$ cette espérance pour la probabilité P.

Pour tout événement C de $\mathcal{A}$ tel que $P(C) > 0$, on note, sous réserve d'existence, $E(Y/C)$ l'espérance de Y pour la probabilité conditionnelle P_C (espérance conditionnelle de Y sachant C).

Partie I.

Cette partie constitue une application particulière des résultats généraux étudiés dans la suite du problème.

On possède n urnes ($n \geqslant 3$) numérotées de 1 à n, dans lesquelles on répartit au hasard et de façon indépendante, m boules indiscernables ($m \geqslant 4$), de sorte que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la probabilité pour chaque boule d'être placée dans l'urne numéro i soit égale à $1/n$.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

À l'issue de cette expérience, on pose pour tout i de $[\![1, n]\!]$:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'urne n°}i \text{ est vide} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose $W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. a) Déterminer pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la loi de la variable aléatoire X_i.

b) Pour tout couple (i, j) d'entiers de $[\![1, n]\!]$ distincts, calculer $P([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$, ainsi que la covariance de X_i et X_j. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

2. a) Exprimer l'espérance $E(W_n)$ de W_n en fonction de n et m.

b) On note $V(W_n)$ la variance de W_n. Calculer $V(W_n)$ en fonction de n et m.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

c) Vérifier l'égalité : $E(W_n) - V(W_n) = n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m} - n(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^m$.
En déduire que $E(W_n) - V(W_n) \geqslant 0$.

3. Dans cette question, l'entier m vérifie $m = \lfloor n\ln n + \theta n\rfloor$, où θ est une constante réelle positive et $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière de x.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(W_n)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(E(W_n) - V(W_n)) = 0$.

c) Soit T_n une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\mu_n = E(W_n)$.
On admet que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$|P([W_n = k]) - P([T_n = k])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\mu_n}\right) \times (\mu_n - V(W_n))$$

Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n\geqslant 3}$?

4. On pose $\mu = e^{-\theta}$, et on suppose que le paramètre μ est inconnu. Dans cette question, on veut estimer μ.
Pour p entier de $\mathbb{N}^*$, on considère un p-échantillon indépendant, identiquement distribué $(T_1, T_2, \ldots, T_p)$ de la loi de Poisson de paramètre μ. On pose :

$$\overline{T_p} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} T_i \quad \text{et} \quad U_p = \sqrt{p}\frac{\overline{T_p} - \mu}{\sqrt{\mu}}$$

a) Montrer que $\overline{T_p}$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre μ.

b) Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(U_p)_{p\geqslant 1}$?

c) On veut construire, pour p assez grand, un intervalle de confiance du paramètre μ au risque α donné. Soit u le réel strictement positif tel que $P([U \geqslant u]) = \alpha/2$, où U est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
Justifier que pour p assez grand, on peut écrire : $P([|U_p| \leqslant u]) = 1 - \alpha$, et déterminer alors un intervalle de confiance $[I_p, J_p]$ pour μ au risque α.

Partie II

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.
Soit M une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Soit A une partie quelconque de $\mathbb{N}$ et $\overline{A}$ son complémentaire dans $\mathbb{N}$. On rappelle que si A est non vide, alors, $P([M \in A]) = \sum\limits_{i\in A} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$, et on pose par convention $[M \in \emptyset] = \emptyset$.
On considère la fonction f_A définie sur $\mathbb{N}$ par $f_A(0) = 0$, et pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$f_A(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}}e^{\lambda}\left(P([M \in A] \cap [M \leqslant k]) - P([M \in A]) \times P([M \leqslant k])\right)$$

1. a) Déterminer la fonction f_A dans les cas particuliers $A = \emptyset$ et $A = \mathbb{N}$.

b) Donner l'expression de $f_A(1)$ en fonction de λ et de $P([M \in A])$ dans les deux cas suivants : $0 \in A$ et $0 \in \overline{A}$.
Exprimer $f_A(2)$ en fonction de λ et de $P([M \in A])$ dans le cas où 0 et 1 appartiennent à A.

2. Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ disjointes.

a) Montrer que $f_{A\cup B} = f_A + f_B$.

b) En déduire que $f_{\overline{A}} = -f_A$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

3. a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, la fonction f_A vérifie la relation suivante :

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \begin{cases} P([M \in \overline{A}]) & \text{si } k \in A \\ -P([M \in A]) & \text{si } k \in \overline{A} \end{cases}$$

b) En déduire que si A est non vide et distincte de $\mathbb{N}$, la fonction f_A n'est pas identiquement nulle.

4. *Dans cette question, j est un entier naturel non nul, et A est le singleton $\{j\}$.* On pose $f_{\{j\}} = f_j$.

a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, montrer l'égalité suivante :

$$f_j(k+1) = \begin{cases} \dfrac{k!}{j!\lambda^{k-j+1}} P([M \geqslant k+1]) & \text{si } k \geqslant j \\ -\dfrac{k!}{j!\lambda^{k-j+1}} P([M \leqslant k]) & \text{si } k < j \end{cases}$$

b) Calculer $f_j(j+1) - f_j(j)$, et déterminer son signe.

c) Calculer pour tout k de $\mathbb{N}^*$, différent de j, $f_j(k+1) - f_j(k)$ en distinguant les deux cas : $k > j$ et $k < j$. En déduire que la différence $f_j(k+1) - f_j(k)$ est positive si et seulement si $k = j$.

d) Établir les inégalités suivantes : $f_j(j+1) - f_j(j) \leqslant \dfrac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leqslant \min\left(1, \dfrac{1}{\lambda}\right)$.

5. On considère le singleton $\{0\}$ et on pose $f_{\{0\}} = f_0$. Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, l'inégalité suivante : $f_0(k+1) - f_0(k) \leqslant 0$.

6. a) Établir pour tout k de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante : $f_A(k+1) - f_A(k) \leqslant f_k(k+1) - f_k(k)$.
(on distinguera les deux cas : $k \in A$ et $k \in \overline{A}$)

b) En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$\sup_{k \geqslant 0} |f_A(k+1) - f_A(k)| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$$

Partie III.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère n variables aléatoires discrètes indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i strictement positif.

On pose $\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$, $W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $R_i = W_n - X_i$.

On note M_n une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ_n. Soit A une partie quelconque de $\mathbb{N}$, et f_A la fonction définie dans la partie II, dans l'expression de laquelle on remplace M par M_n et λ par λ_n. On pose $f = f_A$.

1. a) Établir pour tout i de $[\![1, n]\!]$, l'égalité des deux variables aléatoires $X_i f(W_n)$ et $X_i f(1 + R_i)$.

b) En déduire pour tout i de $[\![1, n]\!]$, l'égalité : $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i))$.

2. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on pose : $Y_i = f(1 + W_n) - f(1 + R_i)$.

Établir la relation suivante : $E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i E(Y_i)$.

3. a) Établir pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la formule suivante :

$$E(Y_i / [X_i = 1]) = E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))$$

b) Calculer pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $E(Y_i / [X_i = 0])$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

c) Déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 E(f(2+R_i) - f(1+R_i))$$

4. Établir l'inégalité suivante :

$$|E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n))| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^{n} p_i^2$$

5. À l'aide de la question II.3.a, montrer, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante :

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])$$

En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, la majoration suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^{n} p_i^2$$

6. Dans cette question uniquement, on suppose que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_i = \dfrac{1}{n+i}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i^2 = 0$.

b) Déterminer la limite en loi de la suite $(W_n)_{n\geqslant 2}$.

Partie IV.

Les notations sont identiques à celles de la partie III, mais les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, **ne sont pas nécessairement indépendantes.**

1. a) Montrer que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1+R_i)/[X_i = 1])$.

b) En déduire l'égalité suivante : $P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \Big[E(f(1+W_n)) - E(f(1+R_i)/[X_i = 1])\Big]$.

2. On suppose que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, il existe une variable aléatoire Z_i définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que la loi de Z_i soit identique à la loi conditionnelle de R_i sachant $[X_i = 1]$.

a) Justifier, pour tout couple (ℓ, j) d'entiers naturels, l'inégalité : $|f(\ell) - f(j)| \leqslant |\ell - j| \times \min\left(1, \dfrac{1}{\lambda_n}\right)$, et en déduire la majoration suivante : $|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \dfrac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum\limits_{i=1}^{n} p_i E(|W_n - Z_i|)$.

b) On suppose de plus que pour tout ω de Ω, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a $W_n(\omega) \geqslant Z_i(\omega)$. Établir l'égalité : $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i E(|W_n - Z_i|) = \lambda_n - V(W_n)$, où $V(W_n)$ désigne la variance de W_n.
En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times (\lambda_n - V(W_n))$$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2007

HEC 2007 VOIE S

CORRIGE

PARTIE I

I–1–a)

La variable X_i est une variable de Bernoulli. Notons p_i son paramètre. L'évènement $(X_i = 1)$ est " les m boules ont été réparties dans les $n-1$ autres cases que la case numéro i. La probabilité qu'une boule donnée aille dans une autre case que la case numéro i vaut $1 - \frac{1}{n}$; par indépendance des événements, la probabilité que toutes les boules aillent dans une case autre que la case numéro i est

$$\boxed{P(X_i = 1) = (1 - \frac{1}{n})^m = E(X_i)}$$

I–1–b)

- L'événement $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$ pour $i \neq j$ est " les m boules ont été réparties dans les $n-2$ autres cases que les cases numéros i et j. Donc $\boxed{P(X_i = 1 \cap X_j = 1) = (1 - \frac{2}{n})^m}$

- $\text{cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$ d'après la formule de Köenig-Huyghens.

La variable $X_i X_j$ est une variable de Bernoulli (elle ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1).

$(X_i X_j = 1) = (X_i = 1) \cap (X_j = 1)$, donc $E(X_i X_j) = (1 - \frac{2}{n})^m$.

Il en résulte que $\boxed{\text{cov}(X_i, X_j) = (1 - \frac{2}{n})^m - (1 - \frac{1}{n})^{2m}}$

- Peut-on avoir $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$?

$\text{cov}(X_i, X_j) = 0 \iff (1 - \frac{2}{n})^m = ((1 - \frac{1}{n})^2)^m$. Or $(1 - \frac{1}{n})$ et $(1 - \frac{2}{n})$ sont positifs, donc l'égalité précédente équivaut à $(1 - \frac{2}{n}) = ((1 - \frac{1}{n})^2)$, ou encore à $1 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$.

Cette dernière égalité est impossible, donc $\text{cov}(X_i, X_j) \neq 0$

$$\boxed{\text{cov}(X_i, X_j) \neq 0 \Longrightarrow X_i \text{ et } X_j \text{ non indépendantes}}$$

I–2–a)

Par linéarité de l'espérance, $E(W_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \boxed{n(1 - \frac{1}{n})^m}$

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

I–2–b)

$$\begin{aligned} V(W_n) &= V(\sum_{i=1}^{n} X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} \operatorname{cov}(X_i, X_j) \\ &= nV(X_1) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} \Big((1-\tfrac{2}{n})^m - (1-\tfrac{1}{n})^{2m} \Big) \end{aligned}$$

car les variables X_i suivent toutes la même loi de Bernoulli.

Or $V(X_1) = p_1(1-p_1) = (1-\frac{1}{n})^m - (1-\frac{1}{n})^{2m}$. Dans la somme il y a $\binom{n}{2}$ termes (autant que de suites strictement croissantes de longueur 2 que l'on peut former dans $[\![1,n]\!]$), donc

$$\begin{aligned} V(W_n) &= n((1-\tfrac{1}{n})^m - (1-\tfrac{1}{n})^{2m}) + n(n-1)\Big((1-\tfrac{2}{n})^m - (1-\tfrac{1}{n})^{2m}\Big) \\ &= n(1-\tfrac{1}{n})^m - n(1-\tfrac{1}{n})^{2m} + n(n-1)(1-\tfrac{2}{n})^m - n(n-1)(1-\tfrac{1}{n})^{2m} \end{aligned}$$

$$\boxed{V(W_n) = n(1-\tfrac{1}{n})^m + n(n-1)(1-\tfrac{2}{n})^m - n^2(1-\tfrac{1}{n})^{2m}}$$

I–2–c)

Il suffit de faire le calcul

$$\boxed{E(W_n) - V(W_n) = n^2(1-\tfrac{1}{n})^{2m} - n(n-1)(1-\tfrac{2}{n})^m}$$

$$\begin{aligned} E(W_n) - V(W_n) &= n^2\Big((1-\tfrac{1}{n})^{2m} - (1-\tfrac{2}{n})^m\Big) + n(1-\tfrac{2}{n})^m \\ &= n^2\Big((1-\tfrac{2}{n}+\tfrac{1}{n^2})^m - (1-\tfrac{2}{n})^m\Big) + n(1-\tfrac{2}{n})^m \end{aligned}$$

Sous cette forme, $E(W_n)-V(W_n)$ apparaît comme la somme de termes positifs, puisque $(1+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}) > (1-\frac{2}{n}) \ge 0 \Longrightarrow (1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})^m > (1-\frac{2}{n})^m$

$$\boxed{E(W_n) - V(W_n) > 0}$$

I–3–a)

On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R},\ [x] \le x < [x]+1$ ou encore $x-1 < [x] \le x$. On obtient donc

$$\boxed{n\ln n + n\theta - 1 < m \le n\ln n + n\theta}$$

Multiplions les 3 termes par $\ln(1-\frac{1}{n}) < 0$, il vient

$$(n\ln n + n\theta)\ln(1-\tfrac{1}{n}) \le m\ln(1-\tfrac{1}{n}) \le (n\ln n + n\theta - 1)\ln(1-\tfrac{1}{n}) \qquad \textbf{(3.a)}$$

ajoutons alors $\ln n$ aux 3 termes, cela donne

$$\underbrace{\ln n + (n\ln n + n\theta)\ln(1-\tfrac{1}{n})}_{a_n} \le \ln(E(W_n)) \le \underbrace{\ln n + (n\ln n + n\theta - 1)\ln(1-\tfrac{1}{n})}_{b_n} \qquad \textbf{(3-b.)}$$

Remarquons que $b_n = a_n - \ln(1-\frac{1}{n})$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

$$\begin{aligned}
a_n &= \ln n + n(\ln n + \theta)(-\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n^2} + o(\tfrac{1}{n^2})) \\
&= \ln n + (\ln n + \theta)(-1 - \tfrac{1}{2n} + o(\tfrac{1}{n})) \\
&= \ln n + (\ln n + \theta)(-1 - \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{n}\varepsilon(n)) \qquad \text{avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0 \\
&= \ln n - \ln n - \tfrac{\ln n}{2n} + \tfrac{\ln n}{n}\varepsilon(n) - \theta - \tfrac{\theta}{2n} - \tfrac{\theta}{n}\varepsilon(n) \\
&= -\theta + \underbrace{(-\tfrac{\theta}{2n} + \tfrac{\theta}{n}\varepsilon(n) - \tfrac{\ln n}{2n} + \tfrac{\theta}{n}\varepsilon(n))}_{=0(1)} \qquad \text{car } \lim_{n\to+\infty}(-\tfrac{\theta}{2n} + \tfrac{\theta}{n}\varepsilon(n) - \tfrac{\ln n}{2n} + \tfrac{\theta}{n}\varepsilon(n)) = 0 \\
&= -\theta + o(1)
\end{aligned}$$

Puisque $\ln(1 - \frac{1}{n}) = o(1)$, on trouve $b_n = -\theta + o(1)$

L'encadrement **(3.b)** donne $-\theta + 0(1) \leq \ln(E(W_n)) \leq -\theta + o(1)$, ce qui implique

$\lim_{n\to+\infty} \ln(E(W_n)) = -\theta$ et par continuité de la fonction exponentielle au point θ : $\lim_{n\to+\infty} E(W_n) = e^{-\theta}$

I–3–b)

On va majorer $E(W_n) - V(W_n)$ puisque cette quantité est > 0 d'après **2–c)**

$E(W_n) - V(W_n) = \exp(2\ln n + 2m\ln(1 - \frac{1}{n})) - \exp(\ln n(n-1) + m\ln(1 - \frac{2}{n}))$

Utilisons l'encadrement **(3.a)**

$$(n\ln n + n\theta)\ln(1 - \tfrac{1}{n}) \leq m\ln(1 - \tfrac{1}{n}) \leq (n\ln n + n\theta - 1)\ln(1 - \tfrac{1}{n})$$

*

Majorons $2m\ln(1 - \frac{1}{n})$

$2m\ln(1 - \frac{1}{n}) \leq 2n(\ln n + \theta - \frac{1}{n})\ln(1 - \frac{1}{n}) = 2(b_n - \ln n)$ (où b_n est la quantité introduite à la question I–3–a), soit $2m\ln(1 - \frac{1}{n}) \leq -2\theta - 2\ln n + o(1)$ et finalement

$2\ln n + 2m\ln(1 - \frac{1}{n}) \leq -2\theta + o(1)$

par croissance de l'exponentielle $\exp(2m\ln(1 - \frac{1}{n}) + 2\ln n) \leq \exp(-2\theta + o(1))$ **(a)**

*

Minorons $m\ln(1 - \frac{2}{n})$. On repart de $m \leq n\ln n + n\theta$ et on multiplie par $\ln(1 - \frac{2}{n}) < 0$

$$\begin{aligned}
m\ln(1 - \tfrac{2}{n}) &\geq n(\ln n + \theta)\ln(1 - \tfrac{2}{n}) \\
&\geq n(\ln n + \theta)(-\tfrac{2}{n} - \tfrac{2}{n^2} + o(\tfrac{1}{n^2})) \\
&\geq (\ln n + \theta)(-2 - \tfrac{2}{n} + o(\tfrac{1}{n})) \\
&\geq (\ln n + \theta)(-2 - \tfrac{2}{n} + \tfrac{1}{n}\varepsilon(n)) \qquad \text{avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0 \\
&\geq -2\ln n - 2\theta + \underbrace{\left(-2\tfrac{\ln n}{n} - 2\tfrac{\theta}{n} + \tfrac{\ln n}{n}\varepsilon(n) + \tfrac{\theta}{n}\varepsilon(n)\right)}_{0(1)} \\
&\geq -2\ln n - 2\theta + o(1)
\end{aligned}$$

$\ln n(n-1) = \ln(n^2(1 - \frac{1}{n})) = 2\ln n + \ln(1 - \frac{1}{n})$; ajoutons $\ln n(n-1)$ à chaque terme de cette dernière inégalité ; on obtient

$m\ln(1 - \frac{2}{n}) + \ln n(n-1) \geq -2\ln n - 2\theta + o(1) + 2\ln n + \ln(1 - \frac{1}{n}) = -2\theta + o(1)$.

Par croissance de l'exponentielle, $\exp(m\ln(1 - \frac{2}{n}) + \ln n(n-1)) \geq \exp(-2\theta + o(1))$,

$$\text{donc } -\exp(m\ln(1 - \tfrac{2}{n}) + \ln n(n-1)) \leq -\exp(-2\theta + o(1)) \qquad \textbf{(b)}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

D'après **(a)** et **(b)**, on obtient l'encadrement :

$$0 \leq E(W_n) - V(W_n) \leq \exp(-2\theta + o(1)) - \exp(-2\theta + o(1))$$

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}(E(W_n) - V(W_n)) = 0$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E(W_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} V(W_n) = e^{-\theta}$

I–3–c)

Envisageons les deux cas

* $\min(1, \frac{1}{\mu_n}) = 1$, alors $|P(W_n = k) - P(T_n = k)| \leq (\mu_n - V(W_n))$
* $\min(1, \frac{1}{\mu_n}) = \frac{1}{\mu_n}$.

$\frac{1}{\mu_n}(\mu_n - V(W_n)) = 1 - \frac{V(W_n)}{\mu_n} = 1 - \frac{V(W_n)}{E(W_n)}$ et on a

$|P(W_n = k) - P(T_n = k)| \leq \frac{1}{\mu_n}(\mu_n - V(W_n)) = 1 - \frac{V(W_n)}{E(W_n)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\mu_n - V(W_n)) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 - \frac{V(W_n)}{E(W_n)}) = 0$ d'après la question **3–b)** ; on conclut que dans les deux cas de figure, $|P(W_n = k) - P(T_n = k)|$ est majorée par une suite numérique qui a pour limite 0 en $+\infty$

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} |P(W_n = k) - P(T_n = k)| = 0$

Or $P(T_n = k) = e^{-\mu_n}\frac{\mu_n^k}{k!}$ et l'on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n = \lim\limits_{n\to+\infty} E(W_n) = e^{-\theta} = \mu$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n = k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(W_n = k) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n = k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}$

Les suites de variables (W_n) et (T_n) convergent en loi vers des variables qui suivent la loi de Poisson de paramètre $\mu = e^{-\theta}$

I–4–a)

Toutes les variables T_i suivent la même loi de Poisson de paramètre μ. Par indépendance des variables T_i, on sait que la variable $\sum\limits_{i=1}^{p} T_i$ suit une loi de Poisson de paramètre $p\mu$.

- $E(\overline{T}_p) = E(\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p} T_i) = \frac{1}{p}E(\sum\limits_{i=1}^{p} T_i) = \frac{p\mu}{p} = \mu$.

$\overline{T}_p$ est un estimateur sans biais de μ

- $V(\overline{T}_p) = V(\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p} T_i) = \frac{1}{p^2}V(\sum\limits_{i=1}^{p} T_i) = \frac{1}{p^2}p\mu = \frac{\mu}{p}$ (car la variable $(\sum\limits_{i=1}^{p} T_i)$ suit une loi de Poisson, son paramètre est égal à sa variance)

$\lim\limits_{p\to+\infty} V(\overline{T}_p) = 0$**, donc $\overline{T}_p$ est un estimateur convergent de μ**

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.