BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE SUJET :
283
CCIP_M2_S

Conceptions : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 9 Mai 2007, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Pour toute variable aléatoire réelle Y définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et possédant une espérance mathématique, on note $E(Y)$ cette espérance pour la probabilité P.

Pour tout événement C de $\mathcal{A}$ tel que $P(C) > 0$, on note, sous réserve d'existence, $E(Y/C)$ l'espérance de Y pour la probabilité conditionnelle P_C (espérance conditionnelle de Y sachant C).

Partie I.

Cette partie constitue une application particulière des résultats généraux étudiés dans la suite du problème.

On possède n urnes $(n \geqslant 3)$ numérotées de 1 à n, dans lesquelles on répartit au hasard et de façon indépendante, m boules indiscernables $(m \geqslant 4)$, de sorte que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la probabilité pour chaque boule d'être placée dans l'urne numéro i soit égale à $1/n$.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

À l'issue de cette expérience, on pose pour tout i de $[\![1, n]\!]$:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'urne n}^\circ i \text{ est vide} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose $W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. a) Déterminer pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la loi de la variable aléatoire X_i.

b) Pour tout couple (i, j) d'entiers de $[\![1, n]\!]$ distincts, calculer $P([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$, ainsi que la covariance de X_i et X_j. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

2. a) Exprimer l'espérance $E(W_n)$ de W_n en fonction de n et m.

b) On note $V(W_n)$ la variance de W_n. Calculer $V(W_n)$ en fonction de n et m.

c) Vérifier l'égalité : $E(W_n) - V(W_n) = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} - n(n-1)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^m$.
En déduire que $E(W_n) - V(W_n) \geqslant 0$.

3. Dans cette question, l'entier m vérifie $m = \lfloor n \ln n + \theta n \rfloor$, où θ est une constante réelle positive et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(W_n)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (E(W_n) - V(W_n)) = 0$.

c) Soit T_n une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\mu_n = E(W_n)$.
On admet que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$|P([W_n = k]) - P([T_n = k])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\mu_n}\right) \times (\mu_n - V(W_n))$$

Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n \geqslant 3}$?

4. On pose $\mu = e^{-\theta}$, et on suppose que le paramètre μ est inconnu. Dans cette question, on veut estimer μ.
Pour p entier de $\mathbb{N}^*$, on considère un p-échantillon indépendant, identiquement distribué $(T_1, T_2, \ldots, T_p)$ de la loi de Poisson de paramètre μ. On pose :

$$\overline{T_p} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} T_i \quad \text{et} \quad U_p = \sqrt{p}\frac{\overline{T_p} - \mu}{\sqrt{\mu}}$$

a) Montrer que $\overline{T_p}$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre μ.

b) Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(U_p)_{p \geqslant 1}$?

c) On veut construire, pour p assez grand, un intervalle de confiance du paramètre μ au risque α donné. Soit u le réel strictement positif tel que $P([U \geqslant u]) = \alpha/2$, où U est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
Justifier que pour p assez grand, on peut écrire : $P([|U_p| \leqslant u]) = 1 - \alpha$, et déterminer alors un intervalle de confiance $[I_p, J_p]$ pour μ au risque α.

Partie II

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.
Soit M une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Soit A une partie quelconque de $\mathbb{N}$ et $\overline{A}$ son complémentaire dans $\mathbb{N}$. On rappelle que si A est non vide, alors, $P([M \in A]) = \sum\limits_{i \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$, et on pose par convention $[M \in \emptyset] = \emptyset$.
On considère la fonction f_A définie sur $\mathbb{N}$ par $f_A(0) = 0$, et pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$f_A(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^{\lambda} \left(P([M \in A] \cap [M \leqslant k]) - P([M \in A]) \times P([M \leqslant k])\right)$$

1. a) Déterminer la fonction f_A dans les cas particuliers $A = \emptyset$ et $A = \mathbb{N}$.

b) Donner l'expression de $f_A(1)$ en fonction de λ et de $P([M \in A])$ dans les deux cas suivants : $0 \in A$ et $0 \in \overline{A}$.
Exprimer $f_A(2)$ en fonction de λ et de $P([M \in A])$ dans le cas où 0 et 1 appartiennent à A.

2. Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ disjointes.

a) Montrer que $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.

b) En déduire que $f_{\overline{A}} = -f_A$.

3. a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, la fonction f_A vérifie la relation suivante :

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \begin{cases} P([M \in \overline{A}]) & \text{si } k \in A \\ -P([M \in A]) & \text{si } k \in \overline{A} \end{cases}$$

b) En déduire que si A est non vide et distincte de $\mathbb{N}$, la fonction f_A n'est pas identiquement nulle.

4. *Dans cette question, j est un entier naturel non nul, et A est le singleton $\{j\}$.* On pose $f_{\{j\}} = f_j$.

a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, montrer l'égalité suivante :

$$f_j(k+1) = \begin{cases} \dfrac{k!}{j!\lambda^{k-j+1}} P([M \geqslant k+1]) & \text{si } k \geqslant j \\ -\dfrac{k!}{j!\lambda^{k-j+1}} P([M \leqslant k]) & \text{si } k < j \end{cases}$$

b) Calculer $f_j(j+1) - f_j(j)$, et déterminer son signe.

c) Calculer pour tout k de $\mathbb{N}^*$, différent de j, $f_j(k+1) - f_j(k)$ en distinguant les deux cas : $k > j$ et $k < j$. En déduire que la différence $f_j(k+1) - f_j(k)$ est positive si et seulement si $k = j$.

d) Établir les inégalités suivantes : $f_j(j+1) - f_j(j) \leqslant \dfrac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leqslant \min\left(1, \dfrac{1}{\lambda}\right)$.

5. On considère le singleton $\{0\}$ et on pose $f_{\{0\}} = f_0$. Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, l'inégalité suivante : $f_0(k+1) - f_0(k) \leqslant 0$.

6. a) Établir pour tout k de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante : $f_A(k+1) - f_A(k) \leqslant f_k(k+1) - f_k(k)$.
(on distinguera les deux cas : $k \in A$ et $k \in \overline{A}$)

b) En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$\sup_{k \geqslant 0} |f_A(k+1) - f_A(k)| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$$

Partie III.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère n variables aléatoires discrètes indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i strictement positif.

On pose $\lambda_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i$, $W_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $R_i = W_n - X_i$.

On note M_n une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ_n. Soit A une partie quelconque de $\mathbb{N}$, et f_A la fonction définie dans la partie II, dans l'expression de laquelle on remplace M par M_n et λ par λ_n. On pose $f = f_A$.

1. a) Établir pour tout i de $[\![1, n]\!]$, l'égalité des deux variables aléatoires $X_i f(W_n)$ et $X_i f(1 + R_i)$.

b) En déduire pour tout i de $[\![1, n]\!]$, l'égalité : $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i))$.

2. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on pose : $Y_i = f(1 + W_n) - f(1 + R_i)$.

Établir la relation suivante : $E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i E(Y_i)$.

3. a) Établir pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la formule suivante :

$$E(Y_i/[X_i = 1]) = E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))$$

b) Calculer pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $E(Y_i/[X_i = 0])$.

c) Déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 E(f(2+R_i) - f(1+R_i))$$

4. Établir l'inégalité suivante :

$$|E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n))| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^{n} p_i^2$$

5. À l'aide de la question II.3.a, montrer, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante :

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])$$

En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, la majoration suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^{n} p_i^2$$

6. Dans cette question uniquement, on suppose que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_i = \dfrac{1}{n+i}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = 0$.

b) Déterminer la limite en loi de la suite $(W_n)_{n \geqslant 2}$.

Partie IV.

Les notations sont identiques à celles de la partie III, mais les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, **ne sont pas nécessairement indépendantes.**

1. a) Montrer que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1+R_i)/[X_i = 1])$.

b) En déduire l'égalité suivante : $P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \Big[E(f(1+W_n)) - E(f(1+R_i)/[X_i = 1])\Big]$.

2. On suppose que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, il existe une variable aléatoire Z_i définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que la loi de Z_i soit identique à la loi conditionnelle de R_i sachant $[X_i = 1]$.

a) Justifier, pour tout couple (ℓ, j) d'entiers naturels, l'inégalité : $|f(\ell) - f(j)| \leqslant |\ell - j| \times \min\left(1, \dfrac{1}{\lambda_n}\right)$, et en déduire la majoration suivante : $|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \dfrac{1}{\lambda_n}\right) \times \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i E(|W_n - Z_i|)$.

b) On suppose de plus que pour tout ω de Ω, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a $W_n(\omega) \geqslant Z_i(\omega)$. Établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i E(|W_n - Z_i|) = \lambda_n - V(W_n)$, où $V(W_n)$ désigne la variance de W_n.

En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times (\lambda_n - V(W_n))$$

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2007

HEC 2007 VOIE S

CORRIGE

PARTIE I

I–1–a)

La variable X_i est une variable de Bernoulli. Notons p_i son paramètre. L'évènement $(X_i = 1)$ est " les m boules ont été réparties dans les $n-1$ autres cases que la case numéro i. La probabilité qu'une boule donnée aille dans une autre case que la case numéro i vaut $1 - \frac{1}{n}$; par indépendance des événements, la probabilité que toutes les boules aillent dans une case autre que la case numéro i est $\boxed{P(X_i = 1) = (1 - \frac{1}{n})^m = E(X_i)}$

I–1–b)

- L'événement $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$ pour $i \neq j$ est " les m boules ont été réparties dans les $n-2$ autres cases que les cases numéros i et j. Donc $\boxed{P(X_i = 1 \cap X_j = 1) = (1 - \frac{2}{n})^m}$

- $\text{cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$ d'après la formule de Köenig-Huyghens.

La variable X_iX_j est une variable de Bernoulli (elle ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1).

$(X_iX_j = 1) = (X_i = 1) \cap (X_j = 1)$, donc $E(X_iX_j) = (1 - \frac{2}{n})^m$.

Il en résulte que $\boxed{\text{cov}(X_i, X_j) = (1 - \frac{2}{n})^m - (1 - \frac{1}{n})^{2m}}$

- Peut-on avoir $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$?

$\text{cov}(X_i, X_j) = 0 \iff (1 - \frac{2}{n})^m = ((1 - \frac{1}{n})^2)^m$. Or $(1 - \frac{1}{n})$ et $(1 - \frac{2}{n})$ sont positifs, donc l'égalité précédente équivaut à $(1 - \frac{2}{n}) = ((1 - \frac{1}{n})^2)$, ou encore à $1 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$.

Cette dernière égalité est impossible, donc $\text{cov}(X_i, X_j) \neq 0$

$$\boxed{\text{cov}(X_i, X_j) \neq 0 \Longrightarrow X_i \text{ et } X_j \text{ non indépendantes}}$$

I–2–a)

Par linéarité de l'espérance, $E(W_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \boxed{n(1 - \frac{1}{n})^m}$

I–2–b)

$$\begin{aligned} V(W_n) &= V(\sum_{i=1}^{n} X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} \operatorname{cov}(X_i, X_j) \\ &= nV(X_1) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} \Big((1-\tfrac{2}{n})^m - (1-\tfrac{1}{n})^{2m}\Big) \end{aligned}$$

car les variables X_i suivent toutes la même loi de Bernoulli.

Or $V(X_1) = p_1(1-p_1) = (1-\frac{1}{n})^m - (1-\frac{1}{n})^{2m}$. Dans la somme il y a $\binom{n}{2}$ termes (autant que de suites strictement croissantes de longueur 2 que l'on peut former dans $[\![1, n]\!]$), donc

$$\begin{aligned} V(W_n) &= n((1-\tfrac{1}{n})^m - (1-\tfrac{1}{n})^{2m}) + n(n-1)\Big((1-\tfrac{2}{n})^m - (1-\tfrac{1}{n})^{2m}\Big) \\ &= n(1-\tfrac{1}{n})^m - n(1-\tfrac{1}{n})^{2m} + n(n-1)(1-\tfrac{2}{n})^m - n(n-1)(1-\tfrac{1}{n})^{2m} \end{aligned}$$

$$\boxed{V(W_n) = n(1-\tfrac{1}{n})^m + n(n-1)(1-\tfrac{2}{n})^m - n^2(1-\tfrac{1}{n})^{2m}}$$

I–2–c)

Il suffit de faire le calcul

$$\boxed{E(W_n) - V(W_n) = n^2(1-\tfrac{1}{n})^{2m} - n(n-1)(1-\tfrac{2}{n})^m}$$

$$\begin{aligned} E(W_n) - V(W_n) &= n^2\Big((1-\tfrac{1}{n})^{2m} - (1-\tfrac{2}{n})^m\Big) + n(1-\tfrac{2}{n})^m \\ &= n^2\Big((1-\tfrac{2}{n}+\tfrac{1}{n^2})^m - (1-\tfrac{2}{n})^m\Big) + n(1-\tfrac{2}{n})^m \end{aligned}$$

Sous cette forme, $E(W_n) - V(W_n)$ apparaît comme la somme de termes positifs, puisque

$$(1+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}) > (1-\frac{2}{n}) \ge 0 \Longrightarrow (1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})^m > (1-\frac{2}{n})^m$$

$$\boxed{E(W_n) - V(W_n) > 0}$$

I–3–a)

On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R},\ [x] \le x < [x]+1$ ou encore $x-1 < [x] \le x$. On obtient donc

$$\boxed{n\ln n + n\theta - 1 < m \le n\ln n + n\theta}$$

Multiplions les 3 termes par $\ln(1-\frac{1}{n}) < 0$, il vient

$$(n\ln n + n\theta)\ln(1-\frac{1}{n}) \le m\ln(1-\frac{1}{n}) \le (n\ln n + n\theta - 1)\ln(1-\frac{1}{n}) \qquad \textbf{(3.a)}$$

ajoutons alors $\ln n$ aux 3 termes, cela donne

$$\underbrace{\ln n + (n\ln n + n\theta)\ln(1-\tfrac{1}{n})}_{a_n} \le \ln(E(W_n)) \le \underbrace{\ln n + (n\ln n + n\theta - 1)\ln(1-\tfrac{1}{n})}_{b_n} \qquad \textbf{(3-b.)}$$

Remarquons que $b_n = a_n - \ln(1-\frac{1}{n})$

$$\begin{aligned}
a_n &= \ln n + n(\ln n + \theta)(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))\\
&= \ln n + (\ln n + \theta)(-1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}))\\
&= \ln n + (\ln n + \theta)(-1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n)) \quad \text{avec} \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0\\
&= \ln n - \ln n - \frac{\ln n}{2n} + \frac{\ln n}{n}\varepsilon(n) - \theta - \frac{\theta}{2n} - \frac{\theta}{n}\varepsilon(n)\\
&= -\theta + \underbrace{(-\frac{\theta}{2n} + \frac{\theta}{n}\varepsilon(n) - \frac{\ln n}{2n} + \frac{\theta}{n}\varepsilon(n))}_{=0(1)} \quad \text{car} \lim_{n\to+\infty}(-\frac{\theta}{2n} + \frac{\theta}{n}\varepsilon(n) - \frac{\ln n}{2n} + \frac{\theta}{n}\varepsilon(n)) = 0\\
&= -\theta + o(1)
\end{aligned}$$

Puisque $\ln(1-\frac{1}{n}) = o(1)$, on trouve $b_n = -\theta + o(1)$

L'encadrement **(3.b)** donne $-\theta + 0(1) \leq \ln(E(W_n)) \leq -\theta + o(1)$, ce qui implique

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ln(E(W_n)) = -\theta \text{ et par continuité de la fonction exponentielle au point } \theta : \lim_{n\to+\infty} E(W_n) = e^{-\theta}}$$

I–3–b)

On va majorer $E(W_n) - V(W_n)$ puisque cette quantité est > 0 d'après **2–c)**

$E(W_n) - V(W_n) = \exp(2\ln n + 2m\ln(1-\frac{1}{n})) - \exp(\ln n(n-1) + m\ln(1-\frac{2}{n}))$

Utilisons l'encadrement **(3.a)**

$$(n\ln n + n\theta)\ln(1-\frac{1}{n}) \leq m\ln(1-\frac{1}{n}) \leq (n\ln n + n\theta - 1)\ln(1-\frac{1}{n})$$

*

Majorons $2m\ln(1-\frac{1}{n})$

$2m\ln(1-\frac{1}{n}) \leq 2n(\ln n + \theta - \frac{1}{n})\ln(1-\frac{1}{n}) = 2(b_n - \ln n)$ (où b_n est la quantité introduite à la question I–3–a), soit $2m\ln(1-\frac{1}{n}) \leq -2\theta - 2\ln n + o(1)$ et finalement

$2\ln n + 2m\ln(1-\frac{1}{n}) \leq -2\theta + o(1)$

par croissance de l'exponentielle $\exp(2m\ln(1-\frac{1}{n}) + 2\ln n) \leq \exp(-2\theta + o(1))$ **(a)**

*

Minorons $m\ln(1-\frac{2}{n})$. On repart de $m \leq n\ln n + n\theta$ et on multiplie par $\ln(1-\frac{2}{n}) < 0$

$$\begin{aligned}
m\ln(1-\frac{2}{n}) &\geq n(\ln n + \theta)\ln(1-\frac{2}{n})\\
&\geq n(\ln n + \theta)(-\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}))\\
&\geq (\ln n + \theta)(-2 - \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n}))\\
&\geq (\ln n + \theta)(-2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n)) \quad \text{avec} \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0\\
&\geq -2\ln n - 2\theta + \underbrace{\Big(-2\frac{\ln n}{n} - 2\frac{\theta}{n} + \frac{\ln n}{n}\varepsilon(n) + \frac{\theta}{n}\varepsilon(n)\Big)}_{0(1)}\\
&\geq -2\ln n - 2\theta + o(1)
\end{aligned}$$

$\ln n(n-1) = \ln(n^2(1-\frac{1}{n})) = 2\ln n + \ln(1-\frac{1}{n})$; ajoutons $\ln n(n-1)$ à chaque terme de cette dernière inégalité ; on obtient

$m\ln(1-\frac{2}{n}) + \ln n(n-1) \geq -2\ln n - 2\theta + o(1) + 2\ln n + \ln(1-\frac{1}{n}) = -2\theta + o(1)$.

Par croissance de l'exponentielle, $\exp(m\ln(1-\frac{2}{n}) + \ln n(n-1)) \geq \exp(-2\theta + o(1))$,

donc $-\exp(m\ln(1-\frac{2}{n}) + \ln n(n-1)) \leq -\exp(-2\theta + o(1))$ **(b)**

D'après **(a)** et **(b)**, on obtient l'encadrement :

$$0 \leq E(W_n) - V(W_n) \leq \exp\left(-2\theta + o(1)\right) - \exp\left(-2\theta + o(1)\right)$$

$$\boxed{\text{Par encadrement, } \lim_{n\to+\infty}(E(W_n) - V(W_n)) = 0 \text{ ; donc } \lim_{n\to+\infty} E(W_n) = \lim_{n\to+\infty} V(W_n) = e^{-\theta}}$$

I–3–c)

Envisageons les deux cas

* $\min(1, \frac{1}{\mu_n}) = 1$, alors $|P(W_n = k) - P(T_n = k)| \leq (\mu_n - V(W_n))$
* $\min(1, \frac{1}{\mu_n}) = \frac{1}{\mu_n}$.

$\frac{1}{\mu_n}(\mu_n - V(W_n)) = 1 - \frac{V(W_n)}{\mu_n} = 1 - \frac{V(W_n)}{E(W_n)}$ et on a

$|P(W_n = k) - P(T_n = k)| \leq \frac{1}{\mu_n}(\mu_n - V(W_n)) = 1 - \frac{V(W_n)}{E(W_n)}$

$\lim_{n\to+\infty}(\mu_n - V(W_n)) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{V(W_n)}{E(W_n)}) = 0$ d'après la question **3–b)** ; on conclut que dans les deux cas de figure, $|P(W_n = k) - P(T_n = k)|$ est majorée par une suite numérique qui a pour limite 0 en $+\infty$

$$\boxed{\text{Par encadrement, } \lim_{n\to+\infty} |P(W_n = k) - P(T_n = k)| = 0}$$

Or $P(T_n = k) = e^{-\mu_n}\frac{\mu_n^k}{k!}$ et l'on sait que $\lim_{n\to+\infty} \mu_n = \lim_{n\to+\infty} E(W_n) = e^{-\theta} = \mu$,

donc $\lim_{n\to+\infty} P(T_n = k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}$

$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to+\infty} P(W_n = k) = \lim_{n\to+\infty} P(T_n = k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}$

Les suites de variables (W_n) et (T_n) convergent en loi vers des variables qui suivent la loi de Poisson de paramètre $\mu = e^{-\theta}$

I–4–a)

Toutes les variables T_i suivent la même loi de Poisson de paramètre μ. Par indépendance des variables T_i, on sait que la variable $\sum_{i=1}^{p} T_i$ suit une loi de Poisson de paramètre $p\mu$.

- $E(\overline{T}_p) = E(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} T_i) = \frac{1}{p}E(\sum_{i=1}^{p} T_i) = \frac{p\mu}{p} = \mu$.

$\overline{T}_p$ est un estimateur sans biais de μ

- $V(\overline{T}_p) = V(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} T_i) = \frac{1}{p^2}V(\sum_{i=1}^{p} T_i) = \frac{1}{p^2}p\mu = \frac{\mu}{p}$ (car la variable $(\sum_{i=1}^{p} T_i)$ suit une loi de Poisson, son paramètre est égal à sa variance)

$\lim_{p\to+\infty} V(\overline{T}_p) = 0$, **donc $\overline{T}_p$ est un estimateur convergent de μ**

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE