



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**CODE SUJET :**

**283**

**CCIP\_M2\_S**

**Conceptions : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.**

OPTION : SCIENTIFIQUE

## MATHEMATIQUES II

Mercredi 9 Mai 2007, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Pour toute variable aléatoire réelle  $Y$  définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et possédant une espérance mathématique, on note  $E(Y)$  cette espérance pour la probabilité  $P$ .

Pour tout événement  $C$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $P(C) > 0$ , on note, sous réserve d'existence,  $E(Y/C)$  l'espérance de  $Y$  pour la probabilité conditionnelle  $P_C$  (espérance conditionnelle de  $Y$  sachant  $C$ ).

### Partie I.

*Cette partie constitue une application particulière des résultats généraux étudiés dans la suite du problème.*

On possède  $n$  urnes ( $n \geq 3$ ) numérotées de 1 à  $n$ , dans lesquelles on répartit au hasard et de façon indépendante,  $m$  boules indiscernables ( $m \geq 4$ ), de sorte que, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , la probabilité pour chaque boule d'être placée dans l'urne numéro  $i$  soit égale à  $1/n$ .

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

À l'issue de cette expérience, on pose pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'urne n}^\circ i \text{ est vide} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose  $W_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

1. a) Déterminer pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , la loi de la variable aléatoire  $X_i$ .
- b) Pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  distincts, calculer  $P([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$ , ainsi que la covariance de  $X_i$  et  $X_j$ . Les variables aléatoires  $X_i$  et  $X_j$  sont-elles indépendantes ?
2. a) Exprimer l'espérance  $E(W_n)$  de  $W_n$  en fonction de  $n$  et  $m$ .
- b) On note  $V(W_n)$  la variance de  $W_n$ . Calculer  $V(W_n)$  en fonction de  $n$  et  $m$ .

c) Vérifier l'égalité :  $E(W_n) - V(W_n) = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} - n(n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m$ .

En déduire que  $E(W_n) - V(W_n) \geq 0$ .

3. Dans cette question, l'entier  $m$  vérifie  $m = \lfloor n \ln n + \theta n \rfloor$ , où  $\theta$  est une constante réelle positive et  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière de  $x$ .

a) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(W_n)$ .

b) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (E(W_n) - V(W_n)) = 0$ .

c) Soit  $T_n$  une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\mu_n = E(W_n)$ .

On admet que pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , on a :

$$|P([W_n = k]) - P([T_n = k])| \leq \min\left(1, \frac{1}{\mu_n}\right) \times (\mu_n - V(W_n))$$

Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires  $(W_n)_{n \geq 3}$  ?

4. On pose  $\mu = e^{-\theta}$ , et on suppose que le paramètre  $\mu$  est inconnu. Dans cette question, on veut estimer  $\mu$ . Pour  $p$  entier de  $\mathbb{N}^*$ , on considère un  $p$ -échantillon indépendant, identiquement distribué  $(T_1, T_2, \dots, T_p)$  de la loi de Poisson de paramètre  $\mu$ . On pose :

$$\bar{T}_p = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p T_i \quad \text{et} \quad U_p = \sqrt{p} \frac{\bar{T}_p - \mu}{\sqrt{\mu}}$$

a) Montrer que  $\bar{T}_p$  est un estimateur sans biais et convergent du paramètre  $\mu$ .

b) Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires  $(U_p)_{p \geq 1}$  ?

c) On veut construire, pour  $p$  assez grand, un intervalle de confiance du paramètre  $\mu$  au risque  $\alpha$  donné. Soit  $u$  le réel strictement positif tel que  $P([U \geq u]) = \alpha/2$ , où  $U$  est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Justifier que pour  $p$  assez grand, on peut écrire :  $P([|U_p| \leq u]) = 1 - \alpha$ , et déterminer alors un intervalle de confiance  $[I_p, J_p]$  pour  $\mu$  au risque  $\alpha$ .

## Partie II

Dans cette partie,  $\lambda$  désigne un réel strictement positif.

Soit  $M$  une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

Soit  $A$  une partie quelconque de  $\mathbb{N}$  et  $\bar{A}$  son complémentaire dans  $\mathbb{N}$ . On rappelle que si  $A$  est non vide, alors,

$$P([M \in A]) = \sum_{i \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad \text{et on pose par convention } [M \in \emptyset] = \emptyset.$$

On considère la fonction  $f_A$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $f_A(0) = 0$ , et pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  :

$$f_A(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^\lambda (P([M \in A] \cap [M \leq k]) - P([M \in A]) \times P([M \leq k]))$$

1. a) Déterminer la fonction  $f_A$  dans les cas particuliers  $A = \emptyset$  et  $A = \mathbb{N}$ .

b) Donner l'expression de  $f_A(1)$  en fonction de  $\lambda$  et de  $P([M \in A])$  dans les deux cas suivants :  $0 \in A$  et  $0 \in \bar{A}$ . Exprimer  $f_A(2)$  en fonction de  $\lambda$  et de  $P([M \in A])$  dans le cas où 0 et 1 appartiennent à  $A$ .

2. Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{N}$  disjointes.

a) Montrer que  $f_{A \cup B} = f_A + f_B$ .

b) En déduire que  $f_{\bar{A}} = -f_A$ .

3. a) Montrer que pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , la fonction  $f_A$  vérifie la relation suivante :

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \begin{cases} P([M \in \bar{A}]) & \text{si } k \in A \\ -P([M \in A]) & \text{si } k \in \bar{A} \end{cases}$$

b) En déduire que si  $A$  est non vide et distincte de  $\mathbb{N}$ , la fonction  $f_A$  n'est pas identiquement nulle.

4. Dans cette question,  $j$  est un entier naturel non nul, et  $A$  est le singleton  $\{j\}$ . On pose  $f_{\{j\}} = f_j$ .

a) Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , montrer l'égalité suivante :

$$f_j(k+1) = \begin{cases} \frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P([M \geq k+1]) & \text{si } k \geq j \\ -\frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P([M \leq k]) & \text{si } k < j \end{cases}$$

b) Calculer  $f_j(j+1) - f_j(j)$ , et déterminer son signe.

c) Calculer pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , différent de  $j$ ,  $f_j(k+1) - f_j(k)$  en distinguant les deux cas :  $k > j$  et  $k < j$ . En déduire que la différence  $f_j(k+1) - f_j(k)$  est positive si et seulement si  $k = j$ .

d) Établir les inégalités suivantes :  $f_j(j+1) - f_j(j) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$ .

5. On considère le singleton  $\{0\}$  et on pose  $f_{\{0\}} = f_0$ . Montrer, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , l'inégalité suivante :  $f_0(k+1) - f_0(k) \leq 0$ .

6. a) Établir pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , l'inégalité suivante :  $f_A(k+1) - f_A(k) \leq f_k(k+1) - f_k(k)$ . (on distinguera les deux cas :  $k \in A$  et  $k \in \bar{A}$ )

b) En déduire, pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{N}$ , l'inégalité suivante :

$$\sup_{k \geq 0} |f_A(k+1) - f_A(k)| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$$

### Partie III.

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On considère  $n$  variables aléatoires discrètes indépendantes  $X_1, X_2, \dots, X_n$  définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , telles que pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , la variable aléatoire  $X_i$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p_i$  strictement positif.

On pose  $\lambda_n = \sum_{i=1}^n p_i$ ,  $W_n = \sum_{i=1}^n X_i$  et, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $R_i = W_n - X_i$ .

On note  $M_n$  une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_n$ . Soit  $A$  une partie quelconque de  $\mathbb{N}$ , et  $f_A$  la fonction définie dans la partie II, dans l'expression de laquelle on remplace  $M$  par  $M_n$  et  $\lambda$  par  $\lambda_n$ . On pose  $f = f_A$ .

1. a) Établir pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , l'égalité des deux variables aléatoires  $X_i f(W_n)$  et  $X_i f(1 + R_i)$ .

b) En déduire pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , l'égalité :  $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i))$ .

2. Pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose :  $Y_i = f(1 + W_n) - f(1 + R_i)$ .

Établir la relation suivante :  $E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i E(Y_i)$ .

3. a) Établir pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , la formule suivante :

$$E(Y_i / [X_i = 1]) = E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))$$

b) Calculer pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $E(Y_i / [X_i = 0])$ .

c) Dédurre des questions précédentes l'égalité suivante :

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i^2 E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))$$

4. Établir l'inégalité suivante :

$$|E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n))| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^n p_i^2$$

5. À l'aide de la question II.3.a, montrer, pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{N}$ , l'égalité suivante :

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])$$

En déduire, pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{N}$ , la majoration suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^n p_i^2$$

6. Dans cette question uniquement, on suppose que pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X_i$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p_i = \frac{1}{n+i}$ .

a) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n p_i^2 = 0$ .

b) Déterminer la limite en loi de la suite  $(W_n)_{n \geq 2}$ .

#### Partie IV.

Les notations sont identiques à celles de la partie III, mais les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , **ne sont pas nécessairement indépendantes**.

1. a) Montrer que pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :  $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i) | [X_i = 1])$ .

b) En déduire l'égalité suivante :  $P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]) = \sum_{i=1}^n p_i [E(f(1 + W_n)) - E(f(1 + R_i) | [X_i = 1])]$ .

2. On suppose que pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe une variable aléatoire  $Z_i$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , telle que la loi de  $Z_i$  soit identique à la loi conditionnelle de  $R_i$  sachant  $[X_i = 1]$ .

a) Justifier, pour tout couple  $(\ell, j)$  d'entiers naturels, l'inégalité :  $|f(\ell) - f(j)| \leq |\ell - j| \times \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right)$ , et en

dédurre la majoration suivante :  $|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|)$ .

b) On suppose de plus que pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $W_n(\omega) \geq Z_i(\omega)$ . Établir l'égalité :

$$\sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|) = \lambda_n - V(W_n), \text{ où } V(W_n) \text{ désigne la variance de } W_n.$$

En déduire, pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{N}$ , l'inégalité suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times (\lambda_n - V(W_n))$$



## ANNALES DE MATHÉMATIQUES 2007

HEC 2007 VOIE S

CORRIGE

## PARTIE I

## I-1-a)

La variable  $X_i$  est une variable de Bernoulli. Notons  $p_i$  son paramètre. L'évènement  $(X_i = 1)$  est " les  $m$  boules ont été réparties dans les  $n - 1$  autres cases que la case numéro  $i$ . La probabilité qu'une boule donnée aille dans une autre case que la case numéro  $i$  vaut  $1 - \frac{1}{n}$  ; par indépendance des événements, la probabilité que toutes les boules aillent dans une case autre que la case numéro  $i$  est

$$P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = E(X_i)$$

## I-1-b)

• L'évènement  $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$  pour  $i \neq j$  est " les  $m$  boules ont été réparties dans les  $n-2$  autres cases que les cases numéros  $i$  et  $j$ . Donc

$$P(X_i = 1 \cap X_j = 1) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m$$

•  $\text{cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$  d'après la formule de Kœnig-Huyghens.

La variable  $X_i X_j$  est une variable de Bernoulli ( elle ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1).

$$(X_i X_j = 1) = (X_i = 1) \cap (X_j = 1), \text{ donc } E(X_i X_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m.$$

Il en résulte que

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}$$

• Peut-on avoir  $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$  ?

$\text{cov}(X_i, X_j) = 0 \iff \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)^m$ . Or  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$  et  $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$  sont positifs, donc l'égalité précédente équivaut à  $\left(1 - \frac{2}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ , ou encore à  $1 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$ .

Cette dernière égalité est impossible, donc  $\text{cov}(X_i, X_j) \neq 0$

$$\text{cov}(X_i, X_j) \neq 0 \implies X_i \text{ et } X_j \text{ non indépendantes}$$

## I-2-a)

Par linéarité de l'espérance,  $E(W_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$

**I-2-b)**

$$\begin{aligned}
 V(W_n) &= V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j) \\
 &= nV(X_1) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} \right)
 \end{aligned}$$

car les variables  $X_i$  suivent toutes la même loi de Bernoulli.

Or  $V(X_1) = p_1(1-p_1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}$ . Dans la somme il y a  $\binom{n}{2}$  termes (autant que de suites strictement croissantes de longueur 2 que l'on peut former dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ), donc

$$\begin{aligned}
 V(W_n) &= n\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}\right) + n(n-1)\left(\left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}\right) \\
 &= n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} + n(n-1)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - n(n-1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}
 \end{aligned}$$

$$V(W_n) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m + n(n-1)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^m - n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m}$$

**I-2-c)**

Il suffit de faire le calcul

$$E(W_n) - V(W_n) = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} - n(n-1)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^m$$

$$\begin{aligned}
 E(W_n) - V(W_n) &= n^2\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m\right) + n\left(1 - \frac{2}{n}\right)^m \\
 &= n^2\left(\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^m - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m\right) + n\left(1 - \frac{2}{n}\right)^m
 \end{aligned}$$

Sous cette forme,  $E(W_n) - V(W_n)$  apparaît comme la somme de termes positifs, puisque

$$\left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}\right) > \left(1 - \frac{2}{n}\right) \geq 0 \implies \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^m > \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m$$

$$E(W_n) - V(W_n) > 0$$

**I-3-a)**

On rappelle que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $[x] \leq x < [x] + 1$  ou encore  $x - 1 < [x] \leq x$ . On obtient donc

$$n \ln n + n\theta - 1 < m \leq n \ln n + n\theta$$

Multiplions les 3 termes par  $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0$ , il vient

$$(n \ln n + n\theta) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq m \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq (n \ln n + n\theta - 1) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{(3.a)}$$

ajoutons alors  $\ln n$  aux 3 termes, cela donne

$$\underbrace{\ln n + (n \ln n + n\theta) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{a_n} \leq \ln(E(W_n)) \leq \underbrace{\ln n + (n \ln n + n\theta - 1) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{b_n} \quad \text{(3-b.)}$$

Remarquons que  $b_n = a_n - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$$\begin{aligned}
a_n &= \ln n + n(\ln n + \theta)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \ln n + (\ln n + \theta)\left(-1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \ln n + (\ln n + \theta)\left(-1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n)\right) \quad \text{avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0 \\
&= \ln n - \ln n - \frac{\ln n}{2n} + \frac{\ln n}{n}\varepsilon(n) - \theta - \frac{\theta}{2n} - \frac{\theta}{n}\varepsilon(n) \\
&= -\theta + \underbrace{\left(-\frac{\theta}{2n} + \frac{\theta}{n}\varepsilon(n) - \frac{\ln n}{2n} + \frac{\theta}{n}\varepsilon(n)\right)}_{=o(1)} \quad \text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\theta}{2n} + \frac{\theta}{n}\varepsilon(n) - \frac{\ln n}{2n} + \frac{\theta}{n}\varepsilon(n)\right) = 0 \\
&= -\theta + o(1)
\end{aligned}$$

Puisque  $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = o(1)$ , on trouve  $b_n = -\theta + o(1)$

L'encadrement **(3.b)** donne  $-\theta + o(1) \leq \ln(E(W_n)) \leq -\theta + o(1)$ , ce qui implique

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(E(W_n)) = -\theta \text{ et par continuité de la fonction} \\
&\text{exponentielle au point } \theta : \lim_{n \rightarrow +\infty} E(W_n) = e^{-\theta}
\end{aligned}$$

### I-3-b)

On va majorer  $E(W_n) - V(W_n)$  puisque cette quantité est  $> 0$  d'après **2-c)**

$$E(W_n) - V(W_n) = \exp\left(2 \ln n + 2m \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) - \exp\left(\ln n(n-1) + m \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right)\right)$$

Utilisons l'encadrement **(3.a)**

$$(n \ln n + n\theta) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq m \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq (n \ln n + n\theta - 1) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

\*

Majorons  $2m \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$2m \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 2n(\ln n + \theta - \frac{1}{n}) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2(b_n - \ln n)$  (où  $b_n$  est la quantité introduite à la question I-3-a), soit  $2m \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -2\theta - 2 \ln n + o(1)$  et finalement

$$2 \ln n + 2m \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -2\theta + o(1)$$

$$\text{par croissance de l'exponentielle } \exp\left(2m \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 \ln n\right) \leq \exp(-2\theta + o(1)) \quad \text{(a)}$$

\*

Minorons  $m \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ . On repart de  $m \leq n \ln n + n\theta$  et on multiplie par  $\ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) < 0$

$$\begin{aligned}
m \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) &\geq n(\ln n + \theta) \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\
&\geq n(\ln n + \theta)\left(-\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\geq (\ln n + \theta)\left(-2 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\geq (\ln n + \theta)\left(-2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n)\right) \quad \text{avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0 \\
&\geq -2 \ln n - 2\theta + \underbrace{\left(-2 \frac{\ln n}{n} - 2 \frac{\theta}{n} + \frac{\ln n}{n}\varepsilon(n) + \frac{\theta}{n}\varepsilon(n)\right)}_{o(1)} \\
&\geq -2 \ln n - 2\theta + o(1)
\end{aligned}$$

$\ln n(n-1) = \ln(n^2(1 - \frac{1}{n})) = 2 \ln n + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$  ; ajoutons  $\ln n(n-1)$  à chaque terme de cette dernière inégalité ; on obtient

$$m \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ln n(n-1) \geq -2 \ln n - 2\theta + o(1) + 2 \ln n + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -2\theta + o(1).$$

Par croissance de l'exponentielle,  $\exp\left(m \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ln n(n-1)\right) \geq \exp(-2\theta + o(1))$ ,

$$\text{donc } -\exp\left(m \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ln n(n-1)\right) \leq -\exp(-2\theta + o(1)) \quad \text{(b)}$$

D'après (a) et (b), on obtient l'encadrement :

$$0 \leq E(W_n) - V(W_n) \leq \exp(-2\theta + o(1)) - \exp(-2\theta + o(1))$$

Par encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (E(W_n) - V(W_n)) = 0$  ; donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(W_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} V(W_n) = e^{-\theta}$

### I-3-c)

Envisageons les deux cas

\*  $\min(1, \frac{1}{\mu_n}) = 1$  , alors  $|P(W_n = k) - P(T_n = k)| \leq (\mu_n - V(W_n))$

\*  $\min(1, \frac{1}{\mu_n}) = \frac{1}{\mu_n}$ .

$\frac{1}{\mu_n}(\mu_n - V(W_n)) = 1 - \frac{V(W_n)}{\mu_n} = 1 - \frac{V(W_n)}{E(W_n)}$  et on a

$$|P(W_n = k) - P(T_n = k)| \leq \frac{1}{\mu_n}(\mu_n - V(W_n)) = 1 - \frac{V(W_n)}{E(W_n)}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu_n - V(W_n)) = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{V(W_n)}{E(W_n)}) = 0$  d'après la question 3-b) ; on conclut que dans les deux cas de figure,  $|P(W_n = k) - P(T_n = k)|$  est majorée par une suite numérique qui a pour limite 0 en  $+\infty$

Par encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |P(W_n = k) - P(T_n = k)| = 0$

Or  $P(T_n = k) = e^{-\mu_n} \frac{\mu_n^k}{k!}$  et l'on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(W_n) = e^{-\theta} = \mu$ ,

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$$

Les suites de variables  $(W_n)$  et  $(T_n)$  convergent en loi vers des variables qui suivent la loi de Poisson de paramètre  $\mu = e^{-\theta}$

### I-4-a)

Toutes les variables  $T_i$  suivent la même loi de Poisson de paramètre  $\mu$ . Par indépendance des variables  $T_i$ , on sait que la variable  $\sum_{i=1}^p T_i$  suit une loi de Poisson de paramètre  $p\mu$ .

•  $E(\bar{T}_p) = E(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p T_i) = \frac{1}{p} E(\sum_{i=1}^p T_i) = \frac{p\mu}{p} = \mu$ .

$\bar{T}_p$  est un estimateur sans biais de  $\mu$

•  $V(\bar{T}_p) = V(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p T_i) = \frac{1}{p^2} V(\sum_{i=1}^p T_i) = \frac{1}{p^2} p\mu = \frac{\mu}{p}$  (car la variable  $(\sum_{i=1}^p T_i)$  suit une loi de Poisson, son paramètre est égal à sa variance)

$\lim_{p \rightarrow +\infty} V(\bar{T}_p) = 0$ , donc  $\bar{T}_p$  est un estimateur convergent de  $\mu$