



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE SUJET :

281  
ESSECM1\_S

Concepteur : ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 2007

**Option scientifique**

**MATHEMATIQUES I**

Lundi 14 mai 2007 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

NOTATIONS, RAPPELS :

Dans tout le problème, la lettre  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on note  $\llbracket 1, n \rrbracket$  l'ensemble des entiers  $k$  vérifiant :  $1 \leq k \leq n$ .

Par ailleurs, on note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels,
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices colonnes réelles à  $n$  lignes,
- ${}^tM$  la transposée d'une matrice  $M$ ,
- $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,
- Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = 0\}$ .

*Objectif du problème : on dispose d'un ordre naturel sur l'ensemble des réels, on s'interroge dans ce problème sur l'extension de cet ordre à  $S_n(\mathbb{R})$  et on s'intéresse en particulier à la monotonie de quelques applications.*

*Les deux premières parties du problème sont indépendantes. La troisième partie utilise simultanément les deux parties précédentes. La quatrième partie reprend essentiellement les notions vues dans la troisième partie.*

## Partie I : représentation intégrale d'une fonction puissance

**Préambule** : on désigne par  $\varphi$  une application définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et à valeurs positives telle que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt$  soit convergente et on lui associe la fonction  $f$  d'une variable réelle définie par :  $f(x) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) \varphi(t) dt$ .

**Question préliminaire** : Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

1°) Pour quelles valeurs du réel  $\alpha$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$  est-elle convergente ?

Dans toute la suite du problème, pour de telles valeurs de  $\alpha$ , on désignera par  $f_\alpha$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) t^\alpha dt.$$

2°) exprimer  $f_0$  à l'aide des fonctions usuelles.

3°) On suppose que  $\alpha \in ]-1, 0[$ .

Pour  $x > 0$ , prouver la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t} dt$  et, à l'aide d'un changement de variable, l'exprimer en fonction de  $x^\alpha$  et d'un réel ne dépendant que de  $\alpha$ .

En déduire l'existence de  $c$  et  $d$ , réels ne dépendant que de  $\alpha$ , tels que :  $\forall x > 0, f_\alpha(x) = c.x^\alpha + d$ . Préciser le signe de  $c$ .

4°) On suppose que  $\alpha \in ]0, 1[$ .

a) Lorsque  $x$  et  $h$  sont des réels tels que  $x > 0, x+h > 0$  et  $h \neq 0$ , vérifier la relation :

$$\frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)} dt.$$

Montrer alors que  $f_\alpha$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que :  $\forall x > 0, f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt$

b) Justifier la relation :  $\forall x > 0, f'_\alpha(x) = f'_\alpha(1).x^{\alpha-1}$ . En déduire l'existence de  $c$  et  $d$ , réels ne dépendant que de  $\alpha$ , tels que :

$\forall x > 0, f_\alpha(x) = c.x^\alpha + d$ . Préciser le signe de  $c$ .

## Partie II : les matrices symétriques réelles

On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  constitué des matrices symétriques, c'est-à-dire  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tM = M\}$ .

On dit qu'une matrice  $M$  de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est définie positive si pour toute matrice colonne  $X$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , ( $X \neq 0 \Rightarrow {}^tXMX > 0$ ).

L'ensemble des matrices symétriques définies positives de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  sera noté  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

Enfin, lorsque  $A$  et  $B$  sont deux matrices symétriques vérifiant  $B - A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , on dira que  $A$  est strictement plus petite que  $B$  et on le notera  $A < B$ .

1°) **Caractérisations des matrices définies positives.**

a) Pour  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , établir l'équivalence suivante : ( $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$  toute valeur propre de  $A$  est strictement positive).

b) Lorsque  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , vérifier l'égalité :  ${}^tXAX = (ax + by)^2 + (ac - b^2)y^2$ .

En déduire que :  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (a > 0 \text{ et } ac - b^2 > 0)$ .

2°) **Exemples.**

a) Soient  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$  :

vérifier que  $A$  et  $B$  appartiennent à  $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$  et montrer que  $A < B$ . A-t-on  $A^2 < B^2$  ?

b) Soit  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

i) Montrer que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

ii) Pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on définit l'application :  $\phi_X^A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; Y \mapsto {}^tXY - {}^tYAY$

Exprimer, pour tout  $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $\phi_X^A(A^{-1}X + H) - \phi_X^A(A^{-1}X)$  en fonction de  $H$  et  $A$ .

En déduire que  $\phi_X^A$  admet en  $A^{-1}X$  un maximum qui vaut  ${}^tXA^{-1}X$ .

iii) On considère maintenant  $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  vérifiant  $A < B$ .

Montrer que pour tout  $X$  et tout  $Y$  matrices colonnes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , ( $Y \neq 0 \Rightarrow \phi_X^A(Y) > \phi_X^B(Y)$ ).

En déduire que  $B^{-1} < A^{-1}$ .

### Partie III : monotonie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Lorsque  $F$  est une application définie sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et à valeur dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , on dit que  $F$  est strictement croissante sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  si : pour tout  $A$  et tout  $B$  appartenant à  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , ( $A < B \Rightarrow F(A) < F(B)$ ).

On dira de même que  $F$  est strictement décroissante sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  lorsque  $-F$  est strictement croissante sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

Par exemple, la propriété vue au II-2-b-iii se traduit par la stricte décroissance de l'application  $F: \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R}); M \mapsto M^{-1}$ .

#### 1°) Résultats préliminaires.

On désigne par  $A$  une matrice symétrique réelle dont l'ensemble des valeurs propres distinctes  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$  est classé dans l'ordre croissant.

On rappelle que :  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(A)$  où  $E_{\lambda_i}(A) = \text{Ker}(A - \lambda_i I_n)$ .

a) Justifier la relation  $A = \sum_{i=1}^p \lambda_i M_i$  où  $M_i$  est la matrice de la projection orthogonale sur  $E_{\lambda_i}(A)$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Dans toute la suite du problème, une telle écriture s'appelle la décomposition de  $A$ .

b) Montrer que  $I_n = \sum_{i=1}^p M_i$ .

c) Donner la décomposition de la matrice  $A + tI_n$  lorsque  $t$  est réel.

Si  $A$  appartient à  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et admet la décomposition  $A = \sum_{i=1}^p \lambda_i M_i$ , on définit, lorsque  $f$  est une application de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$ , la matrice

$$\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^p f(\lambda_i) M_i.$$

On peut ainsi considérer l'application  $\tilde{f}$  définie sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et à valeurs dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par  $\tilde{f}: A \mapsto \tilde{f}(A)$ .

2°) a) Montrer que, pour tout  $A$  appartenant à  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ,  $\tilde{f}(A)$  appartient à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et donner la décomposition de  $\tilde{f}(A)$  lorsque  $f$  est strictement monotone.

b) Préciser  $\tilde{f}$  lorsque que  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$ .

c) Soient  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  deux applications strictement monotones. Montrer que :  $\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$ .

d) Lorsque  $(a, b, c, d)$  appartient à  $\mathbb{R}^4$  avec  $c > 0$ ,  $d > 0$  et  $bc - ad \neq 0$ , on considère l'application  $h: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ .

Après avoir vérifié que :  $\forall x > 0$ ,  $h(x) = \frac{bc-ad}{c(cx+d)} + \frac{a}{c}$ , montrer la stricte monotonie de  $\tilde{h}$  sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

#### 3°) Intégrales de matrices.

Soit  $M: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); t \mapsto (m_{i,j}(t))_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket}$  où  $\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket$ ,  $m_{i,j}: t \mapsto m_{i,j}(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Lorsque pour tout couple  $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} m_{i,j}(t) dt$  converge, on dit que la matrice  $\left( \int_0^{+\infty} m_{i,j}(t) dt \right)_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket}$  existe et

on la note  $\int_0^{+\infty} M(t) dt$ .

#### a) Résultats préliminaires.

(i) Soient  $M$  et  $N$  telles que  $\int_0^{+\infty} M(t) dt$  et  $\int_0^{+\infty} N(t) dt$  existent.

Montrer que  $\int_0^{+\infty} (M(t) + N(t)) dt$  existe et que :  $\int_0^{+\infty} (M(t) + N(t)) dt = \int_0^{+\infty} M(t) dt + \int_0^{+\infty} N(t) dt$ .

Dans le même ordre d'idée, on admettra les deux propriétés suivantes (ii) et (iii).

(ii) Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $h$  continue de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\int_0^{+\infty} h(t)dt$  converge, et  $M: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); t \mapsto M(t) = h(t)A$ ,

alors  $\int_0^{+\infty} M(t)dt$  existe et  $\int_0^{+\infty} M(t)dt = \left( \int_0^{+\infty} h(t)dt \right) A$ .

(iii) Soient  $M$  telle que  $\int_0^{+\infty} M(t)dt$  existe et  $X$  une matrice colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

alors  $\int_0^{+\infty} {}^t X M(t) X dt$  converge et  ${}^t X \left( \int_0^{+\infty} M(t)dt \right) X = \int_0^{+\infty} {}^t X M(t) X dt$ .

b) On revient à l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $\forall x > 0, f(x) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) \varphi(t) dt$  où  $\varphi$  est une application définie et

continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et à valeurs positives, telle que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt$  converge. (cf Partie I).

On suppose que  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et admet la décomposition  $A = \sum_{i=1}^p \lambda_i M_i$ .

i) Montrer que :  $\tilde{f}(A) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \left( \frac{t}{1+t^2} I_n - (A + tI_n)^{-1} \right) dt$ .

ii) Si  $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $A < B$ , montrer que, pour toute matrice colonne  $X$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , non-nulle, et tout  $t > 0$ , on a :

$${}^t X \left( \frac{t}{1+t^2} I_n - (A + tI_n)^{-1} \right) X < {}^t X \left( \frac{t}{1+t^2} I_n - (B + tI_n)^{-1} \right) X.$$

iii) En déduire que  $\tilde{f}$  est strictement croissante sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

c) A l'aide des résultats de la Partie I, vérifier que  $\tilde{f}$  est strictement croissante sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Préciser le sens de variation de  $\tilde{p}_\alpha$  associée à  $p_\alpha: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^\alpha$  selon que  $\alpha \in ]-1, 0[$  ou  $]0, 1[$ .

#### Partie IV : monotonies comparées de $f$ et $\tilde{f}$

On revient aux notations introduites dans les parties précédentes.

1°) On désigne par  $f$  une application de  $\mathbb{R}_+^*$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que, lorsque  $\tilde{f}$  est strictement croissante sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ,  $f$  l'est aussi sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2°) Pour  $t > 0$ , on définit les matrices :  $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t + e^{-t}}{2} & \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t - e^{-t}}{2} & \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{pmatrix}$  et  $B(t) = \begin{pmatrix} t^3 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3 \end{pmatrix}$ .

a) Montrer que  $A(t) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$  et donner la décomposition de  $A(t)$ .

b) Montrer qu'il existe  $\eta_0 > 0$  tel que  $\forall t \in ]0, \eta_0[$ ,  $B(t) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ . (on ne cherchera pas à déterminer une valeur, même approchée, de  $\eta_0$ .)

c) Etablir de même qu'il existe  $\eta_1 \in ]0, \eta_0[$  tel que  $\forall t \in ]0, \eta_1[$ ,  $B(t) < A(t)$ .

d) Déterminer  $\tilde{p}_\alpha(A(t))$  et  $\tilde{p}_\alpha(B(t))$  pour tout réel  $t$  de  $]0, \eta_1[$  lorsque  $p_\alpha$  est l'application de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}: x \mapsto x^\alpha$ .

e) Lorsque  $\alpha > 1$ , déterminer un équivalent en  $0^+$  de la quantité  $\left( \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} - t^{3\alpha} \right) \left( \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} - \left( \frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3 \right)^\alpha \right) - \left( \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2} \right)^2$ .

f) En déduire que, pour  $\alpha > 1$ ,  $\tilde{p}_\alpha$  n'est pas strictement croissante sur  $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ .

3°) Démontrer que la propriété énoncée en IV-1 n'admet pas de réciproque dès que  $n \geq 2$ .

\*\*\*



## ANNALES DE MATHÉMATIQUES 2007

## ESSEC MATH I 2007 VOIE S

## CORRIGE

## PARTIE I

## Question préliminaire

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) \varphi(t) = \frac{xt-1}{(1+t^2)(x+t)} \varphi(t) = g(t)$$

Puisque  $x > 0$ , la fraction rationnelle  $t \mapsto \frac{xt-1}{(1+t^2)(x+t)}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et puisque  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on en déduit que la fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  : l'intégrale est impropre en 0 et en  $+\infty$

## • En zéro.

$\frac{xt-1}{(1+t^2)(x+t)} \varphi(t) \underset{(0)}{\sim} -\frac{1}{x} \varphi(t)$ . Or  $\varphi(t) \underset{(0)}{\sim} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}$ . On sait, d'après l'énoncé, que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt$  converge, donc on en conclut que l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt$ . On obtient tout de suite que l'intégrale  $\int_0^1 -\frac{1}{x} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt$  converge et par équivalence des fonctions continues positives, on déduit que l'intégrale  $\int_0^1 \frac{xt-1}{(1+t^2)(x+t)} \varphi(t) = \int_0^1 g(t) dt$  est convergente.

• en  $+\infty$ .

$g(t) \underset{(+\infty)}{\sim} x \frac{\varphi(t)}{t^2} \underset{(+\infty)}{\sim} x \frac{\varphi(t)}{1+t^2}$ . L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt$  est convergente par hypothèse. Par équivalence des fonctions continues, positives, on conclut que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} g(t) dt$  est convergente, donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} g(t) dt$  est convergente.

$$\forall x > 0, \int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) \varphi(t) dt \text{ converge : } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*$$

## I-1)

• En  $+\infty$ ,

$\frac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{t^{2-\alpha}}$ . L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$  converge si et seulement si  $2-\alpha > 1$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\alpha < 1$  (d'après le critère de Riemann). Donc par équivalence des fonctions continues, positives, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$  converge si et seulement si  $\alpha < 1$ .

• **En 0,**

$\frac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{t^{-\alpha}}$ . L'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{t^{-\alpha}}$  converge si et seulement si  $-\alpha < 1$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\alpha > -1$  (d'après le critère de Riemann). Donc par équivalence des fonctions continues, positives, l'intégrale  $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$  converge si et seulement si  $\alpha > -1$ .

Par définition, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$  converge si et seulement si les deux intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$  et  $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$  convergent.

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$  converge si et seulement si  $-1 < \alpha < 1$

**I-2)**

Remarquons que, si l'on pose  $t^\alpha = \varphi(t)$ , la fonction  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , positive, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$  converge puisque  $-1 < \alpha < 1 \implies 2 - \alpha > 1$ .

D'après la question précédente, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) t^\alpha dt$  converge.

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) dt \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \int_0^y \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) dt \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2} \ln(1+t^2) - \ln(x+t) \right]_0^y \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \ln(1+y^2) - \ln(x+y) + \ln x \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1+y^2}{(x+y)^2} + \ln x \right) \end{aligned}$$

Or  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1+y^2}{(x+y)^2} = 1$ , donc par continuité de la fonction  $\ln$  au point 1, on en déduit que  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+y^2}{(x+y)^2} = \ln 1 = 0$

$$\forall x > 0, f_0(x) = \ln x$$

**I-3)**

Ici  $\alpha \in ]-1, 0[$

•  $t \mapsto \frac{t^\alpha}{x+t}$  est continue, positive sur  $]0, +\infty[$ . L'intégrale est impropre en  $+\infty$  et en 0

\* En  $+\infty$ .  $\frac{t^\alpha}{x+t} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}}$ .  $\alpha < 0 \implies 1 - \alpha > 1$ , donc l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1-\alpha}} dt$  est convergente (**critère de Riemann**). Par équivalence des fonctions continues, positives, on déduit que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t} dt$  converge.

\* En 0.

$\frac{t^\alpha}{x+t} \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{x} \frac{1}{t^{-\alpha}}$ .  $\alpha > -1 \implies -\alpha < 1$ , donc l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{t^{-\alpha}} dt$  est convergente (**critère de Riemann**). Par équivalence des fonctions continues, positives, on déduit que

l'intégrale  $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{x+t} dt$  converge.

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t} dt$  converge pour  $-1 < \alpha < 0$

• • Posons  $u = \frac{t}{x}$  ;  $dt = xdu$  ; le changement de variable est de classe  $C^1$ , bijectif, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha u^\alpha}{x(1+u)} xdu = x^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u} du$$

D'autre part,  $f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t} dt$  : décomposition possible puisque les deux intégrales  $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) t^\alpha dt$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t} dt$  convergent et cela implique la convergence de  $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} dt$

Compte tenu du résultat précédent,

$$f_\alpha(x) = -x^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} dt$$

La fonction  $t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t}$  est continue et positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ , les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant, donc  $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} dt < 0$ .

$f_\alpha(x) = x^\alpha c + d$  avec  $c = -\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} dt < 0$  et  $d = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} dt$

**I-4-a)**

Ici  $\alpha \in ]0, 1[$

$$\begin{aligned} \frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left( \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+h+t} dt \right) \\ &\quad - \frac{1}{h} \left( \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t} dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{x+t} - \frac{1}{x+h+t} \right) t^\alpha dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} \frac{h}{(x+t)(x+h+t)} t^\alpha dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)(x+h+t)} t^\alpha dt \\ \frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)(x+h+t)} t^\alpha dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{(x+t)(x+h+t)} - \frac{1}{(x+t)^2} \right) t^\alpha dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{-h}{(x+t)^2(x+h+t)} t^\alpha dt \quad (3) \end{aligned}$$

Prenons  $h / -\frac{x}{2} \leq h \leq \frac{x}{2}$  ; on a  $\frac{x}{2} \leq x+h \leq \frac{3x}{2}$ , puis  $0 < \frac{x}{2} + t \leq x+h+t \leq \frac{3x}{2} + t$  et par conséquent  $\frac{1}{x+h+t} \leq \frac{1}{\frac{x}{2} + t}$ . On multiplie les termes de cette inégalité par  $\frac{t^\alpha}{(x+t)^2} > 0$  et cela donne  $\frac{t^\alpha}{(x+t)^2(x+h+t)} \leq \frac{t^\alpha}{(x+t)^2(\frac{x}{2} + t)}$ , puis on intègre entre 0 et  $+\infty$  (les bornes sont dans l'ordre croissant).

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2(x+h+t)} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2(\frac{x}{2}+t)} dt \quad (\mathbf{3}').$$

Repartons de l'égalité **(3)** :

$$\frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt = -h \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)^2(x+h+t)} t^\alpha dt$$

$$\left| \frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt \right| = |h| \left| \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)^2(x+h+t)} t^\alpha dt \right|$$

$$\left| \frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt \right| \leq |h| \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{(x+t)^2(x+h+t)} t^\alpha \right| dt$$

les bornes sont dans l'ordre croissant

$$\left| \frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt \right| \leq |h| \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)^2(x+h+t)} t^\alpha dt$$

$$\text{car } \frac{1}{(x+t)^2(x+h+t)} t^\alpha > 0$$

$$\left| \frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt \right| \leq |h| \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)^2(\frac{x}{2}+t)} t^\alpha dt \quad \text{d'après (3')}$$

Par encadrement on obtient  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt \right) = 0$  puisque l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)^2(\frac{x}{2}+t)} t^\alpha dt$  est une constante ; cela veut dire

$$f_\alpha \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall x > 0, f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt$$

**I-4-b)**

$$f'_\alpha(1) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t)^2} dt$$

On peut remarquer que  $f'_\alpha(1) > 0$  pour les mêmes raisons qu'au I-3)

$f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt$ . Dans cette intégrale, effectuons le changement de variable  $t = xu$  ;  $dt = xdu$ . ce changement est  $C^1$  bijectif, donc

$$f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha u^\alpha}{x^2(1+t)^2} xdu = x^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(1+t)^2} du$$

$$\forall x > 0, f'_\alpha(x) = x^{\alpha-1} f'_\alpha(1)$$

Primitivons les deux termes de cette égalité, il vient :

$$\exists d \in \mathbb{R} / \forall x > 0, f_\alpha(x) = \frac{f'_\alpha(1)}{\alpha} x^\alpha + d ; c = \frac{f'_\alpha(1)}{\alpha} > 0$$

**PARTIE II**