CODE SUJET :

281
ESSECM1_S

Concepteur : ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 2007

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Lundi 14 mai 2007 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

NOTATIONS, RAPPELS :
Dans tout le problème, la lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers k vérifiant : $1 \leq k \leq n$.
Par ailleurs, on note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels,
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes réelles à n lignes,
- ${}^t M$ la transposée d'une matrice M,
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = 0\}$.

<u>Objectif du problème</u> : on dispose d'un ordre naturel sur l'ensemble des réels, on s'interroge dans ce problème sur l'extension de cet ordre à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on s'intéresse en particulier à la monotonie de quelques applications.

Les deux premières parties du problème sont indépendantes. La troisième partie utilise simultanément les deux parties précédentes. La quatrième partie reprend essentiellement les notions vues dans la troisième partie.

Partie I : représentation intégrale d'une fonction puissance

Préambule : on désigne par φ une application définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs positives telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt$ soit convergente et on lui associe la fonction f d'une variable réelle définie par : $f(x)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{1}{x+t}\right)\varphi(t)\,dt$.

Question préliminaire : Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1°) Pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{1+t^2}dt$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite du problème, pour de telles valeurs de α, on désignera par f_α l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f_\alpha(x)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{1}{x+t}\right)t^\alpha dt.$$

2°) exprimer f_0 à l'aide des fonctions usuelles.

3°) **On suppose que $\alpha\in\left]-1,0\right[$.**

Pour $x>0$, prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{x+t}dt$ et, à l'aide d'un changement de variable, l'exprimer en fonction de x^α et d'un réel ne dépendant que de α.

En déduire l'existence de c et d, réels ne dépendant que de α, tels que : $\forall x>0,\ f_\alpha(x)=c.x^\alpha+d$. Préciser le signe de c.

4°) **On suppose que $\alpha\in\left]0,1\right[$.**

a) Lorsque x et h sont des réels tels que $x>0$, $x+h>0$ et $h\neq 0$, vérifier la relation :

$$\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h}=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)}dt.$$

Montrer alors que f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $\forall x>0,\ f_\alpha'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+t)^2}dt$

b) Justifier la relation : $\forall x>0,\ f_\alpha'(x)=f_\alpha'(1).x^{\alpha-1}$. En déduire l'existence de c et d, réels ne dépendant que de α, tels que : $\forall x>0,\ f_\alpha(x)=c.x^\alpha+d$. Préciser le signe de c.

Partie II : les matrices symétriques réelles

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques, c'est-à-dire $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ {}^tM=M\}$.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(X\neq 0\Rightarrow {}^tXMX>0)$.

L'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sera noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Enfin, lorsque A et B sont deux matrices symétriques vérifiant $B-A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on dira que A est strictement plus petite que B et on le notera $A<B$.

1°) Caractérisations des matrices définies positives.

a) Pour $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, établir l'équivalence suivante : ($A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\Leftrightarrow$ toute valeur propre de A est strictement positive).

b) Lorsque $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, vérifier l'égalité : $a\,{}^tXAX=(ax+by)^2+(ac-b^2)y^2$.

En déduire que : ($\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\in\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})\Leftrightarrow(a>0\text{ et }ac-b^2>0)$).

2°) Exemples.

a) Soients $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4&0\\0&\frac{5}{3}\end{pmatrix}$:

vérifier que A et B appartiennent à $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et montrer que $A<B$. A-t-on $A^2<B^2$?

b) Soit $A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

i) Montrer que A est inversible et que $A^{-1}\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

ii) Pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit l'application : $\phi_X^A:\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}\,;Y\mapsto 2\,{}^tXY-{}^tYAY$

Exprimer, pour tout $H\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\phi_X^A(A^{-1}X+H)-\phi_X^A(A^{-1}X)$ en fonction de H et A.

En déduire que ϕ_X^A admet en $A^{-1}X$ un maximum qui vaut ${}^tXA^{-1}X$.

iii) On considère maintenant $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ vérifiant $A < B$.

Montrer que pour tout X et tout Y matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\left(Y \neq 0 \Rightarrow \phi_X^A(Y) > \phi_X^B(Y)\right)$.

En déduire que $B^{-1} < A^{-1}$.

Partie III : monotonie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Lorsque F est une application définie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et à valeur dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on dit que F est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si : pour tout A et tout B appartenant à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\left(A < B \Rightarrow F(A) < F(B)\right)$.

On dira de même que F est strictement décroissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque $-$ F est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Par exemple, la propriété vue au II-2-b-iii se traduit par la stricte décroissance de l'application $F : \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R}); M \mapsto M^{-1}$.

1°) Résultats préliminaires.

On désigne par A une matrice symétrique réelle dont l'ensemble des valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ est classé dans l'ordre croissant.

On rappelle que : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(A)$ où $E_{\lambda_i}(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_n)$.

a) Justifier la relation $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$ où M_i est la matrice de la projection orthogonale sur $E_{\lambda_i}(A)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Dans toute la suite du problème, une telle écriture s'appelle la décomposition de A.

b) Montrer que $I_n = \sum_{i=1}^{p} M_i$.

c) Donner la décomposition de la matrice $A + tI_n$ lorsque t est réel.

Si A appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et admet la décomposition $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$, on définit, lorsque f est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, la matrice $\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i) M_i$.

On peut ainsi considérer l'application $\tilde{f}$ définie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\tilde{f} : A \mapsto \tilde{f}(A)$.

2°) a) Montrer que, pour tout A appartenant à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\tilde{f}(A)$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et donner la décomposition de $\tilde{f}(A)$ lorsque f est strictement monotone.

b) Préciser $\tilde{f}$ lorsque que $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

c) Soient $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ deux applications strictement monotones. Montrer que : $\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$.

d) Lorsque (a, b, c, d) appartient à $\mathbb{R}^4$ avec $c > 0$, $d > 0$ et $bc - ad \neq 0$, on considère l'application $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Après avoir vérifié que : $\forall x > 0,\ h(x) = \dfrac{bc - ad}{c(cx+d)} + \dfrac{a}{c}$, montrer la stricte monotonie de $\tilde{h}$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

3°) Intégrales de matrices.

Soit $M : \mathbb{R}_+^* \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); t \mapsto \left(m_{i,j}(t)\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]}$ où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, $m_{i,j} : t \mapsto m_{i,j}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Lorsque pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} m_{i,j}(t)\,dt$ converge, on dit que la matrice $\left(\int_0^{+\infty} m_{i,j}(t)\,dt\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]}$ existe et on la note $\int_0^{+\infty} M(t)\,dt$.

a) Résultats préliminaires.

(i) Soient M et N telles que $\int_0^{+\infty} M(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} N(t)\,dt$ existent.

Montrer que $\int_0^{+\infty} \left(M(t) + N(t)\right) dt$ existe et que : $\int_0^{+\infty} \left(M(t) + N(t)\right) dt = \int_0^{+\infty} M(t)\,dt + \int_0^{+\infty} N(t)\,dt$.

Dans le même ordre d'idée, on admettra les deux propriétés suivantes (ii) et (iii).

(ii) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et h continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} h(t)dt$ converge, et $M : \mathbb{R}_+^* \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); t \mapsto M(t) = h(t)A$,

alors $\int_0^{+\infty} M(t)dt$ existe et $\int_0^{+\infty} M(t)dt = \left(\int_0^{+\infty} h(t)dt\right)A$.

(iii) Soient M telle que $\int_0^{+\infty} M(t)dt$ existe et X une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

alors $\int_0^{+\infty} {}^t XM(t)Xdt$ converge et ${}^t X\left(\int_0^{+\infty} M(t)dt\right)X = \int_0^{+\infty} {}^t XM(t)Xdt$.

b) On revient à l'application f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x > 0,\ f(x) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right)\varphi(t)dt$ où φ est une application définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs positives, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt$ converge. (cf Partie I).

On suppose que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et admet la décomposition $A = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i M_i$.

i) Montrer que : $\tilde{f}(A) = \int_0^{+\infty}\varphi(t)\left(\frac{t}{1+t^2}I_n - (A+tI_n)^{-1}\right)dt$.

ii) Si $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A < B$, montrer que, pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non-nulle, et tout $t > 0$, on a :

$${}^t X\left(\frac{t}{1+t^2}I_n - (A+tI_n)^{-1}\right)X < {}^t X\left(\frac{t}{1+t^2}I_n - (B+tI_n)^{-1}\right)X.$$

iii) En déduire que $\tilde{f}$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

c) A l'aide des résultats de la Partie I, vérifier que $\widetilde{\ln}$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Préciser le sens de variation de $\tilde{p}_\alpha$ associée à $p_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; x \mapsto x^\alpha$ selon que $\alpha \in]-1,0[$ ou $]0,1[$.

Partie IV : monotonies comparées de f et $\tilde{f}$

On revient aux notations introduites dans les parties précédentes.

1°) On désigne par f une application de $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que, lorsque $\tilde{f}$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, f l'est aussi sur $\mathbb{R}_+^*$.

2°) Pour $t > 0$, on définit les matrices : $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t + e^{-t}}{2} & \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t - e^{-t}}{2} & \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} t^3 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A(t) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et donner la décomposition de $A(t)$.

b) Montrer qu'il existe $\eta_0 > 0$ tel que $\forall t \in]0,\eta_0[$, $B(t) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. (on ne cherchera pas à déterminer une valeur, même approchée, de η_0.)

c) Etablir de même qu'il existe $\eta_1 \in]0,\eta_0[$ tel que $\forall t \in]0,\eta_1[$, $B(t) < A(t)$.

d) Déterminer $\tilde{p}_\alpha(A(t))$ et $\tilde{p}_\alpha(B(t))$ pour tout réel t de $]0,\eta_1[$ lorsque p_α est l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto x^\alpha$.

e) Lorsque $\alpha > 1$, déterminer un équivalent en 0^+ de la quantité $\left(\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} - t^{3\alpha}\right)\left(\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} - \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3\right)^\alpha\right) - \left(\frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}\right)^2$.

f) En déduire que, pour $\alpha > 1$, $\tilde{p}_\alpha$ n'est pas strictement croissante sur $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

3°) Démontrer que la propriété énoncée en IV-1 n'admet pas de réciproque dès que $n \geq 2$.

***

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2007

ESSEC MATH I 2007 VOIE S

CORRIGE

PARTIE I

Question préliminaire

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \left(\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{1}{x+t}\right)\varphi(t) = \dfrac{xt-1}{(1+t^2)(x+t)}\varphi(t) = g(t)$

Puisque $x > 0$, la fraction rationnelle $t \longmapsto \dfrac{xt-1}{(1+t^2)(x+t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et puisque φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$: l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$

- **En zéro.**

$\dfrac{xt-1}{(1+t^2)(x+t)}\varphi(t) \underset{(0)}{\sim} -\frac{1}{x}\varphi(t)$. Or $\varphi(t) \underset{(0)}{\sim} \dfrac{\varphi(t)}{1+t^2}$. On sait, d'après l'énoncé, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt$ converge, donc on en conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt$. On obtient tout de suite que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\frac{1}{x}\frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt$ converge et par équivalence des fonctions continues positives, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{xt-1}{(1+t^2)(x+t)}\varphi(t) = \int_0^1 g(t)dt$ est convergente.

- **en** $+\infty$.

$g(t) \underset{(+\infty)}{\sim} x\dfrac{\varphi(t)}{t^2} \underset{(+\infty)}{\sim} x\dfrac{\varphi(t)}{1+t^2}$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt$ est convergente par hypothèse. Par équivalence des fonctions continues, positives, on conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est convergente, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est convergente.

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right)\varphi(t)dt \text{ converge : } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*}$$

I–1)

- **En** $+\infty$,

$\dfrac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{t^{2-\alpha}}$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$ converge si et seulement si $2-\alpha > 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha < 1$ (d'après le critère de Riemann). Donc par équivalence des fonctions continues, positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

- **En** 0,

$\dfrac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{-\alpha}}$ converge si et seulement si $-\alpha < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > -1$ (d'après le critère de Riemann). Donc par équivalence des fonctions continues, positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^2}dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.

Par définition, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}dt$ converge si et seulement si les deux intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^2}dt$ convergent.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}dt \text{ converge si et seulement si } -1 < \alpha < 1}$$

I–2)

Remarquons que, si l'on pose $t^\alpha = \varphi(t)$, la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, positive, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}dt$ converge puisque $-1 < \alpha < 1 \Longrightarrow 2-\alpha > 1$.

D'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\Big)t^\alpha dt$ converge.

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \int_0^{+\infty} \Big(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\Big)dt \\
&= \lim_{y\to+\infty} \Big(\int_0^{y} \Big(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\Big)dt \\
&= \lim_{y\to+\infty} \Big[\frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \ln(x+t)\Big]_0^y \\
&= \lim_{y\to+\infty} \Big(\frac{1}{2}\ln(1+y^2) - \ln(x+y) + \ln x\Big) \\
&= \lim_{y\to+\infty} \Big(\frac{1}{2}\ln\frac{1+y^2}{(x+y)^2} + \ln x\Big)
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{1+y^2}{(x+y)^2} = 1$, donc par continuité de la fonction ln au point 1, on en déduit que $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \ln\frac{1+y^2}{(x+y)^2} = \ln 1 = 0$

$$\boxed{\forall x > 0,\ \ f_0(x) = \ln x}$$

I–3)

Ici $\alpha \in]-1, 0[$

- $t \longmapsto \dfrac{t^\alpha}{x+t}$ est continue, positive sur $]0, +\infty[$. L'intégrale est impropre en $+\infty$ et en 0

$*$ En $+\infty$. $\dfrac{t^\alpha}{x+t} \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$. $\alpha < 0 \Longrightarrow 1-\alpha > 1$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1-\alpha}}dt$ est convergente (**critère de Riemann**). Par équivalence des fonctions continues, positives, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t}dt$ converge.

$*$ En 0.

$\dfrac{t^\alpha}{x+t} \underset{(0)}{\sim} \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{t^{-\alpha}}$. $\alpha > -1 \Longrightarrow -\alpha < 1$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{-\alpha}}dt$ est convergente (**critère de Riemann**). Par équivalence des fonctions continues, positives, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{x+t}dt$ converge.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t}dt \text{ converge pour } -1<\alpha<0}$$

• • Posons $u=\frac{t}{x}$; $dt = xdu$; le changement de variable est de classe C^1, bijectif, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha u^\alpha}{x(1+u)}xdu = x^a \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u}du$$

D'autre part, $f_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2}dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t}dt$: décomposition possible puisque les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\Big)t^\alpha dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t}dt$ convergent et cela implique la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2}dt$

Compte tenu du résultat précédent,

$$f_\alpha(x) = -x^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t}dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2}dt$$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{t^\alpha}{1+t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, les bornes de l'intégale sont dans l'ordre croissant, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t}dt < 0$.

$$\boxed{f_\alpha(x) = x^\alpha c + d \text{ avec } c = -\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t}dt < 0 \text{ et } d = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2}dt}$$

I–4–a)

Ici $\alpha \in]0,1[$

$$\begin{aligned}
\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} &= \frac{1}{h}\Big(\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2}dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+h+t}dt\Big) \\
&\qquad -\frac{1}{h}\Big(\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2}dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t}dt\Big) \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} (\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x+h+t})t^\alpha dt \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \frac{h}{(x+t)(x+h+t)}t^\alpha dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)(x+h+t)}t^\alpha dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)(x+h+t)}t^\alpha dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{(x+t)(x+h+t)} - \frac{1}{(x+t)^2}\Big)t^\alpha dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{-h}{(x+t)^2(x+h+t)}t^\alpha dt \qquad \textbf{(3)}
\end{aligned}$$

Prenons $h \;/\; -\frac{x}{2} \le h \le \frac{x}{2}$; on a $\frac{x}{2} \le x+h \le \frac{3x}{2}$, puis $0 < \frac{x}{2}+t \le x+h+t \le \frac{3x}{2}+t$ et par conséquent $\dfrac{1}{x+h+t} \le \dfrac{1}{\frac{x}{2}+t}$. On multiplie les termes de cette inégalité par $\dfrac{t^\alpha}{(x+t)^2} > 0$ et cela donne $\dfrac{t^\alpha}{(x+t)^2(x+h+t)} \le \dfrac{t^\alpha}{(x+t)^2(\frac{x}{2}+t)}$, puis on intègre entre 0 et $+\infty$ (les bornes sont dans l'ordre croissant).

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2(x+h+t)}dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2(\frac{x}{2}+t)}dt \qquad \textbf{(3')}.$$

Repartons de l'égalité **(3)** :

$$\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}dt = -h\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)^2(x+h+t)}t^\alpha dt$$

$$\left|\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}dt\right| = |h|\left|\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)^2(x+h+t)}t^\alpha dt\right|$$

$$\left|\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}dt\right| \leq |h|\int_0^{+\infty} \left|\frac{1}{(x+t)^2(x+h+t)}t^\alpha\right| dt$$

les bornes sont dans l'ordre croissant

$$\left|\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}dt\right| \leq |h|\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)^2(x+h+t)}t^\alpha dt$$

car $\frac{1}{(x+t)^2(x+h+t)}t^\alpha > 0$

$$\left|\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}dt\right| \leq |h|\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)^2(\frac{x}{2}+t)}t^\alpha dt \qquad \textbf{d'après (3')}$$

Par encadrement on obtient $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}dt\right) = 0$ puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)^2(\frac{x}{2}+t)}t^\alpha dt$ est une constante ; cela veut dire

$$\boxed{f_\alpha \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall x>0,\ f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}dt}$$

I–4–b)

$f'_\alpha(1) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t)^2}dt$

On peut remarquer que $f'_\alpha(1) > 0$ pour les mêmes raisons qu'au I–3)

$f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}dt$. Dans cette intégrale, effectuons le changement de variable $t = xu$; $dt = xdu$. ce changement est C^1 bijectif, donc

$$f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha u^\alpha}{x^2(1+t)^2}xdu = x^{\alpha-1}\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(1+t)^2}du$$

$$\forall x>0,\ f'_\alpha(x) = x^{\alpha-1}f'_\alpha(1)$$

Primitivons les deux termes de cette égalité, il vient :

$$\boxed{\exists\, d \in \mathbb{R}\ /\ \forall x>0,\ f_\alpha(x) = \frac{f'_\alpha(1)}{\alpha}x^\alpha + d\ ;\ c = \frac{f'_\alpha(1)}{\alpha} > 0}$$

PARTIE II