VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–35

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k\geq 1}$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $Z_n = \inf(X_1, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire que :

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega,\ Z_n(\omega) = \min(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

On admet que Z_n est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) Donner la fonction de répartition et une densité de Z_n.

2) Soit U une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des X_k et suivant la loi uniforme sur $[0;1]$.

a) Déterminer une densité de $-U$.

b) Déterminer une densité g de $Z_n - U$.

c) En considérant la variable aléatoire M_n définie par $M_n = \inf(X_2, \ldots, X_n)$, déduire de ce qui précède la valeur de $P(Z_n = X_1)$.

Ce résultat était-il prévisible ? La variable aléatoire $Z_n - X_1$ est-elle une variable à densité ? La variable aléatoire $Z_n - X_1$ est-elle une variable discrète ?

3) On pose $W_n = \ln Z_n$.

a) Déterminer une densité de W_n.

b) Soit $(Y_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

i) Déterminer une densité de $T_{n+1} = -\dfrac{Y_{n+1}}{n+1}$.

ii) On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k}{k}$.

Montrer que S_n et W_n possède la même densité.

c) Montrer, sans calculer explicitement l'intégrale, que

$$\int_{-\infty}^{0} x \exp(x)(1-\exp(x))^{n-1} dx = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 35

1)

Pour tout réel x, $(Z_n > x) = (\inf(X_1, \ldots, X_n) > x) = (X_1 > x) \cap \ldots \cap (X_n > x)$. Notons F_k la fonction de répartition de X_k.

Par indépendance des variables X_i,

$P(Z_n > x) = \prod_{k=1}^{n}(P(X_k > x) = \prod_{k=1}^{n}(1 - P(X_k \leq x)) = \prod_{k=1}^{n}(1 - F_k(x))$ et finalement, puisque les variables X_k suivent la même loi que X_1, on obtient

$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - P(Z_n \leq x) = (1 - F_1(x))^n$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = 1 - (1 - F_1(x))^n$

Rappelons que $F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

$$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

On vérifie facilement que F_{Z_n} est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, donc Z_n **est une variable à densité.**

On prendra pour densité f_{Z_n} de Z_n, F'_{Z_n} sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, et on prolongera par continuité aux points 0^+ et 1^-.

$$f_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ n(1-x)^{n-1} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

2–a)

Il est clair que $(-U)(\Omega) = [-1, 0]$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ P(-U \leq x) &= P(U \geq -x) = 1 - P(U < -x) \\ &= 1 - P(U \leq -x) \quad \text{car } U \text{ est une variable à densité} \end{aligned}$$

Donc $F_{-U}(x) = 1 - F_U(-x)$.

Or $x \leq -1 \iff -x \geq 1$, donc $F_U(-x) = 1$; $-1 \leq x \leq 0 \iff 0 \leq -x \leq 1$, donc $F_U(-x) = -x$ et $x \geq 0 \iff -x \leq 0$, donc $F_U(-x) = 0$.

Ce qui donne $F_{-U}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 1 + x & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

On peut remarquer que $-U$ suit la loi uniforme sur $[-1, 0]$.

2–b)

Notons $T_n = Z_n - U = Z_n + (-U)$. La variable U est indépendante de $X_1, \ldots, X_n$, donc $-U$ aussi et par conséquant $-U$ est indépendante de Z_n. De plus les densités de Z_n et de $-U$ sont bornées, il en résulte qu'une densité g de T_n est donnée par le produit de convolution :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_n}(t) f_{-U}(x-t)dt \\ &= \int_0^1 f_{Z_n}(t) f_{-U}(x-t)dt \quad \text{car } f_{Z_n} \text{ est nulle à l'extérieur de } [0,1] \\ &= n\int_0^1 (1-t)^{n-1} f_{-U}(x-t)dt \end{aligned}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.