VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–35

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k\geq 1}$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $Z_n = \inf(X_1, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire que :

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega,\ \ Z_n(\omega) = \min(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

On admet que Z_n est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) Donner la fonction de répartition et une densité de Z_n.

2) Soit U une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des X_k et suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$.

a) Déterminer une densité de $-U$.

b) Déterminer une densité g de $Z_n - U$.

c) En considérant la variable aléatoire M_n définie par $M_n = \inf(X_2, \ldots, X_n)$, déduire de ce qui précède la valeur de $P(Z_n = X_1)$.

Ce résultat était-il prévisible ? La variable aléatoire $Z_n - X_1$ est-elle une variable à densité ? La variable aléatoire $Z_n - X_1$ est-elle une variable discrète ?

3) On pose $W_n = \ln Z_n$.

a) Déterminer une densité de W_n.

b) Soit $(Y_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

i) Déterminer une densité de $T_{n+1} = -\dfrac{Y_{n+1}}{n+1}$.

ii) On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k}{k}$.

Montrer que S_n et W_n possède la même densité.

c) Montrer, sans calculer explicitement l'intégrale, que

$$\int_{-\infty}^{0} x \exp(x)(1 - \exp(x))^{n-1} dx = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 35

1)

Pour tout réel x, $(Z_n > x) = (\inf(X_1, \ldots, X_n) > x) = (X_1 > x) \cap \ldots \cap (X_n > x)$. Notons F_k la fonction de répartition de X_k.
Par indépendance des variables X_i,
$P(Z_n > x) = \prod_{k=1}^{n} (P(X_k > x) = \prod_{k=1}^{n} (1 - P(X_k \leq x)) = \prod_{k=1}^{n} (1 - F_k(x))$ et finalement, puisque les variables X_k suivent la même loi que X_1, on obtient
$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - P(Z_n \leq x) = (1 - F_1(x))^n$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = 1 - (1 - F_1(x))^n$

Rappelons que $F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

$$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

On vérifie facilement que F_{Z_n} est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, donc Z_n **est une variable à densité.**

On prendra pour densité f_{Z_n} de Z_n, F'_{Z_n} sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, et on prolongera par continuité aux points 0^+ et 1^-.

$$f_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ n(1-x)^{n-1} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

2–a)

Il est clair que $(-U)(\Omega) = [-1, 0]$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ P(-U \leq x) &= P(U \geq -x) = 1 - P(U < -x) \\ &= 1 - P(U \leq -x) \qquad \text{car } U \text{ est une variable à densité} \end{aligned}$$

Donc $F_{-U}(x) = 1 - F_U(-x)$.

Or $x \leq -1 \iff -x \geq 1$, donc $F_U(-x) = 1$; $-1 \leq x \leq 0 \iff 0 \leq -x \leq 1$, donc $F_U(-x) = -x$ et $x \geq 0 \iff -x \leq 0$, donc $F_U(-x) = 0$.

Ce qui donne $F_{-U}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 1 + x & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

On peut remarquer que $-U$ suit la loi uniforme sur $[-1, 0]$.

2–b)

Notons $T_n = Z_n - U = Z_n + (-U)$. La variable U est indépendante de $X_1, \ldots, X_n$, donc $-U$ aussi et par conséquant $-U$ est indépendante de Z_n. De plus les densités de Z_n et de $-U$ sont bornées, il en résulte qu'une densité g de T_n est donnée par le produit de convolution :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_n}(t) f_{-U}(x-t)\,dt \\ &= \int_0^1 f_{Z_n}(t) f_{-U}(x-t)\,dt \qquad \text{car } f_{Z_n} \text{ est nulle à l'extérieur de } [0,1] \\ &= n \int_0^1 (1-t)^{n-1} f_{-U}(x-t)\,dt \end{aligned}$$

