



EXERCICES DE MATHEMATIQUES



VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-34

On suppose que toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . La lettre a désigne un réel strictement positif.

1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} (a+1)x^a & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- a) Vérifier que f est une densité de probabilité.
 b) Soit X une variable admettant f pour densité. Calculer l'espérance $E(X)$ de X .
 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction g_n définie par :

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{(a+1)^n x^a}{\Gamma(n)} (-\ln x)^{n-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- a) Montrer l'existence de l'intégrale $\int_0^1 x^a (-\ln x)^{n-1} dx$.
 b) A l'aide du changement de variable $u = -\ln x$, montrer que g_n est une densité de probabilité.
 Soit T_n une variable aléatoire réelle de densité g_n .
 c) Vérifier que T_n admet une espérance et calculer $E(T_n)$.
 3) Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes, suivant la même loi que X . On pose $Z = \frac{X_1}{X_2}$.

- a) Donner une densité des variables aléatoires Y_1 et Y_2 définies par $Y_1 = \ln X_1$ et $Y_2 = -\ln X_2$.
 b) En déduire une densité de la variable $T = \ln Z$.
 c) Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{a+1}{2} x^a & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{a+1}{2} x^{-(a+2)} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que h est une densité de Z .

4) Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X . On pose $W_n = \prod_{k=1}^n X_k$.

- a) Montrer que la variable W_n admet g_n pour densité.
 b) Retrouver le résultat de la question 2.c).

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 34

1-a)

On vérifie facilement que la fonction f est positive ou nulle sur \mathbb{R} , continue sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

On peut remarquer que f est continue en 0, mais pas en 1 (ces considérations n'ayant pas de conséquences pour la suite).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \left[(a+1) \frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_0^1 = 1.$$

Nous pouvons conclure : f est une densité de probabilité.

1-b)

L'espérance de X existe puisqu'en fait l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ se réduit à l'intégrale

$$\int_0^1 xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_0^1 (a+1)x^{a+1}dx = \left[\frac{a+1}{a+2} x^{a+2} \right]_0^1, \text{ donc } \boxed{E(X) = \frac{a+1}{a+2}}$$

2-a)

La fonction $x \mapsto x^a(-\ln x)^{n-1}$ est continue sur $]0, 1]$ puisque $n-1 \geq 0$.

De plus, si $n \geq 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a(-\ln x)^{n-1} = 0$ par croissances comparées et,

si $n = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = 0$ sans problème.

La fonction $x \mapsto x^a(-\ln x)^{n-1}$ est prolongeable par continuité en 0, donc l'intégrale $\int_0^1 x^a(-\ln x)^{n-1}dx$ est faussement impropre et par conséquent convergente.

2-b)

La fonction g_n est évidemment positive ou nulle sur \mathbb{R} .

La fonction g_n est continue sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ sans problème. On vient de voir en fait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) = 0 = g_n(0)$. Donc elle est continue en 0, mais elle n'est continue en 1 que lorsque $n \geq 2$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx$ se ramène à $\int_0^1 g_n(x)dx$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx$ converge d'après la question précédente.

Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx$.

Posons $u = -\ln x$. Ce changement de variable est de classe C^1 et strictement monotone sur $]0, 1]$, il est donc légitime.

On a $x = e^{-u}$, $dx = -e^{-u}du$. Par suite

$$\int_0^1 g_n(x)dx = - \int_{+\infty}^0 \frac{(a+1)^n e^{-(a+1)u} u^{n-1}}{\Gamma(n)} du = \int_0^{+\infty} \frac{(a+1)^n e^{-(a+1)u} u^{n-1}}{\Gamma(n)} du$$

On reconnaît l'intégrale sur \mathbb{R} d'une densité de la loi $\Gamma(a+1, n)$, donc cette intégrale vaut 1.