VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE−34

On suppose que toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La lettre a désigne un réel strictement positif.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (a+1)x^a & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Vérifier que f est une densité de probabilité.

b) Soit X une variable admettant f pour densité. Calculer l'espérance $E(X)$ de X.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction g_n définie par :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(a+1)^n x^a}{\Gamma(n)}(-\ln x)^{n-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^a(-\ln x)^{n-1}dx$.

b) A l'aide du changement de variable $u = -\ln x$, montrer que g_n est une densité de probabilité.

Soit T_n une variable aléatoire réelle de densité g_n.

c) Vérifier que T_n admet une espérance et calculer $E(T_n)$.

3) Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes, suivant la même loi que X. On pose $Z = \dfrac{X_1}{X_2}$.

a) Donner une densité des variables aléatoires Y_1 et Y_2 définies par $Y_1 = \ln X_1$ et $Y_2 = -\ln X_2$.

b) En déduire une densité de la variable $T = \ln Z$.

c) Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{a+1}{2}x^a & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{a+1}{2}x^{-(a+2)} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que h est une densité de Z.

4) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X. On pose $W_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$.

a) Montrer que la variable W_n admet g_n pour densité.

b) Retrouver le résultat de la question 2.c).

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 34

1–a)

On vérifie facilement que la fonction f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

On peut remarquer que f est continue en 0, mais pas en 1 (ces considérations n'ayant pas de conséquences pour la suite).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \left[(a+1)\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = 1.$$

$$\boxed{\text{Nous pouvons conclure : } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

1–b)

L'espérance de X existe puisqu'en fait l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ se réduit à l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$

$$E(X) = \int_0^1 (a+1)x^{a+1}dx = \left[\frac{a+1}{a+2}x^{a+2}\right]_0^1, \text{ donc } \boxed{E(X) = \frac{a+1}{a+2}}$$

2–a)

La fonction $x \longmapsto x^a(-\ln x)^{n-1}$ est continue sur $]0, 1]$ puisque $n - 1 \geq 0$.

De plus, si $n \geq 2$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^a(-\ln x)^{n-1} = 0$ par croissances comparées et,

si $n = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^a = 0$ sans problème.

La fonction $x \longmapsto x^a(-\ln x)^{n-1}$ est prolongeable par continuité en 0, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^a(-\ln x)^{n-1}dx$ est faussement impropre et par conséquent convergente.

2–b)

La fonction g_n est évidemment positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

La fonction g_n est continue sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ sans problème. On vient de voir en fait que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g_n(x) = 0 = g_n(0)$. Donc elle est continue en 0, mais elle n'est continue en 1 que lorsque $n \geq 2$.

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx$ se ramène à $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)dx$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx$ converge d'après la question précédente.

Calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx$.

Posons $u = -\ln x$. Ce changement de variable est de classe C^1 et strictement monotone sur $]0, 1]$, il est donc légitime.

On a $x = e^{-u}$, $dx = -e^{-u}du$. Par suite

$$\int_0^1 g_n(x)dx = -\int_{+\infty}^0 \frac{(a+1)^n e^{-(a+1)u}u^{n-1}}{\Gamma(n)}du = \int_0^{+\infty} \frac{(a+1)^n e^{-(a+1)u}u^{n-1}}{\Gamma(n)}du$$

On reconnaît l'intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une densité de la loi $\Gamma(a+1, n)$, donc cette intégrale vaut 1.