



## EXERCICES DE MATHEMATIQUES



### ANALYSE

### ENONCE DE L'EXERCICE

#### ENONCE-35

Soit  $E$  l'ensemble des polynômes  $P$  à coefficients complexes vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{C}, P(x)P(x+1) + P(x^2) = 0 \quad (1)$$

- 1) Trouver les polynômes constants vérifiant (1)
- 2) On suppose que  $P$  a un degré supérieur ou égal à un et que  $P$  appartient à  $E$ .
  - a) Si  $\alpha$  est une racine de  $P$ , montrer que  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha^{2^p}$  est aussi une racine de  $P$ . Que peut-on en conclure sur le module de  $\alpha$  ? (se rappeler que  $P$  a un nombre fini de racines)
  - b) Montrer que  $(\alpha - 1)^2$  est aussi une racine de  $P$ . Quelles sont les valeurs possibles de  $\alpha$  ?
- 3) Montrer qu'un polynôme de  $E$  de degré supérieur ou égal à un est de la forme  $x \mapsto -x^n(1-x)^n$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
Quels sont les polynômes de  $E$  ?