X PC II – 2008

Enoncé en fin de document.

X PC II 2008

I. ECOULEMENT DE FLUIDE EN MICRO CANAL

I .1. Ecoulement sous un gradient de pression constante

I.1.1) * Le terme de gauche $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right)$ représente l'accélération particulaire, somme de l'accélération locale $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ et de l'accélération convective $(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$.

* $\begin{cases} \rho\vec{g} : \text{force volumique de pesanteur} \\ \overrightarrow{\text{grad}}\,P : \text{force volumique de pression} \\ \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v} : \text{force volumique de viscosité} \end{cases}$

I.1.2) * $R_e = \frac{\text{transfert convectif de } \vec{P}}{\text{transfert diffusif de } \vec{P}} = \frac{\rho\left\|\vec{v}.\text{grad}\,\vec{v}\right\|}{\eta\left\|\vec{\Delta}\vec{v}\right\|} \sim \frac{\rho v^2/l}{\eta v/l^2} = \frac{\rho l v}{\eta}$

On doit utiliser comme longueur caractéristique la plus petite des longueurs transverses, soit h.

Ainsi : $\boxed{R_e = \frac{\rho h V_0}{\eta}}$

* ***A.N.*** : $\underline{R_e = 10^{-3} << 1}$: écoulement laminaire, on peut négliger le terme convectif dans l'équation de Navier-Stokes

I.1.3) Pour un fluide incompressible : $\text{div}\,\vec{v} = 0$ (écoulement incompressible suffit…)

Alors, si a priori $\vec{v} = v_x(x,z,t)$: $\boxed{\text{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0}$

I.1.4) En régime laminaire stationnaire :

$$\rho\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P + \eta\vec{\Delta}\vec{v} = 0$$

En projection sur Ox, on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \eta\,\Delta v = \eta\,\frac{d^2 v}{dz^2}$$

Donc $\frac{\partial P}{\partial x}$ ne dépend que de z : $\frac{\partial P}{\partial x} = F(z)$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

Par intégration sur la longueur L du canal, on en déduit :

$$(P(L) - P(O)) = F(z)\, L \Rightarrow F(z) = -\frac{\Delta P}{L} = \text{cste}$$

Finalement, P ne dépend que de x et :

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\Delta P}{L} < 0}$$

De plus : $$\boxed{\eta \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{\Delta P}{L}}$$

I.1.5) L'équation différentielle ci-dessus s'intègre en :

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{\Delta P}{\eta L} z + \alpha$$

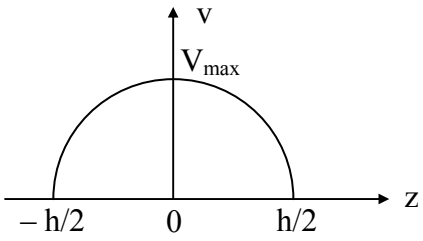
Puis : $$v(z) = -\frac{\Delta P}{2\eta L} z^2 + \alpha z + \beta$$

Avec : $\begin{cases} v\left(z = \frac{h}{2}\right) = 0 \\ v\left(z = -\frac{h}{2}\right) = 0 \quad \text{(non glissement aux parois)} \end{cases}$

$$\Rightarrow \qquad \alpha = 0 \text{ et } \beta = \frac{\Delta P}{2\eta L}\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

Finalement : $$\boxed{v(z) = \frac{\Delta P}{2\eta L}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right]}$$ (profil parabolique de vitesse)

$$\boxed{V_{max} = v(z=0) = \frac{\Delta P h^2}{8\eta L}}$$



Vitesse moyenne de l'écoulement :

$$V_0 = \frac{1}{h}\int_{z=-h/2}^{h/2} v(z)dz$$

Soit : $$V_0 = \frac{\Delta P}{2\eta L}\,\frac{1}{h}\,2\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^h \Rightarrow \boxed{V_0 = \frac{\Delta P}{12\eta L} h^2}$$

I.1.6) Le débit volumique à travers une section droite du canal est :

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

$$Q = \iint_S \vec{v}.dS\,\vec{x} = \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v(z)wdz = whV_0$$

Soit : $\boxed{Q = \dfrac{h^3 w}{12\eta L}\Delta P}$

I.1.7) ***A.N.*** : * $\boxed{\Delta P = 12\,\eta_e \dfrac{LQ}{h^3 w} = 120 \text{ Pa}}$

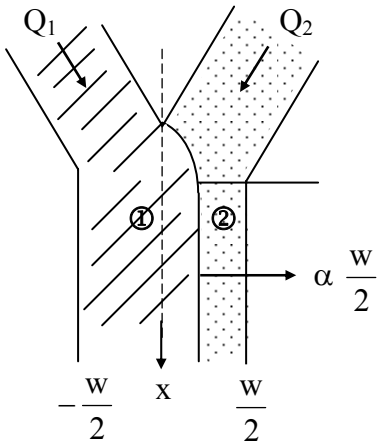
* $\boxed{\Delta H = \dfrac{\Delta P}{\rho g} = 12{,}2 \text{ mm}}$

* Pour h = 100 µm $\begin{cases} \Delta P = 0{,}12 \text{ Pa} \\ \Delta H = 12{,}2 \text{ µm} \end{cases}$

Le contrôle de la dénivellation est alors beaucoup trop délicat.

Donc, pour assurer un débit aussi faible que $Q = 10^{-12} m^3 s^{-1}$, il faut construire un canal de taille micrométrique (de mise en œuvre délicate).

I.2) Ecoulement biphasique



I.2.1) Vue de dessus :

* Pour le fluide ① : $Q_1 = \dfrac{h^3 \dfrac{w}{2}(1+\alpha)}{12\,\eta_1 L}\Delta P$

* Pour le fluide ② : $Q_2 = \dfrac{h^3 \dfrac{w}{2}(1-\alpha)}{12\,\eta_2 L}\Delta P$

Ainsi : $\dfrac{Q_1\eta_1}{1+\alpha} = \dfrac{Q_2\eta_2}{1-\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = \dfrac{Q_1\eta_1 - Q_2\eta_2}{Q_1\eta_1 + Q_2\eta_2}}$

Rem. : * Si $\eta_1 = \eta_2$: $\alpha = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + Q_2} \approx 1$ si $Q_1 >> Q_2$

Pour 2 fluides de même viscosité, le fluide de plus grand débit occupe quasiment tout le lit du canal après jonction.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

* Si $Q_1 = Q_2$: $\alpha = \dfrac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \approx 1$ si $\eta_1 >> \eta_2$: le fluide le plus visqueux occupe tout le lit du canal.

I.2.6) ***A.N.*** : $\alpha = \dfrac{50\,\eta_e - \eta_h}{50\,\eta_e + \eta_h} = -0{,}33$

Même avec un débit cinquante fois plus grand pour l'eau, l'huile, 100 fois plus visqueuse, occupe l'essentiel du lit après la jonction.

II – ANALOGIE ELECTRONIQUE DES CANAUX MICROFLUIDIQUES

II.1) Analogues hydrauliques du courant et de la tension électrique

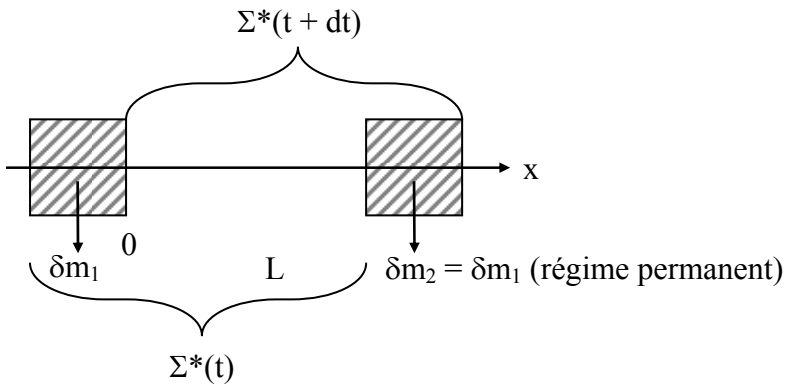
II.1.1) $\vec{j} \longleftrightarrow \vec{v}$

(vecteur transport de charges en $cm^{-2}s^{-1}$) (vecteur transport de volume, en $m^3m^{-2}s^{-1}$)

$I = \iint_{(S)} \vec{j}.\overrightarrow{dS} \longleftrightarrow Q = \iint \vec{v}.\overrightarrow{dS}$

(Flux de $\vec{j}$, en $Cm^{-2}s^{-1} \equiv A$) (Flux de $\vec{v}$, en m^3s^{-1})

II.1.2) Pour un écoulement de vitesse moyenne $\vec{V}_0 = V_0\,\vec{x}$:



Le théorème de la puissance cinétique, appliqué au système fermé Σ^+ suivi dans son mouvement, s'écrit :

$$\underbrace{\frac{DE_C^*}{Dt}}_{0} = P_{(int + ext)}$$

(écoulement permanent et « uniforme »)

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

$$\begin{cases} P(\text{pesanteur}) = 0 \text{ (écoulement horizontal)} \\ P_{ext}(\text{pression}) = P(O)V_0A - P(L)V_0A = Q\Delta P \\ P_{int}(\text{pression}) = 0 \text{ car fluide incompressible} \\ P_{int}(\text{viscosité}) = 0 \text{ car écoulement « uniforme »} \\ P_{ext}(\text{viscosité}) = P_{vis} \end{cases}$$

Ainsi : $\underbrace{P_{vis}}_{<0} + \underbrace{P_{ext}(\text{pression})}_{>0} = 0$

Et : $\boxed{|P_{vis}| = P_{ext}(\text{pression}) = P_m = Q\Delta P}$

Analogie : $P_{élect} = I\Delta V$

I (→)

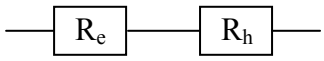
(←) ΔV

II.2) Résistance hydraulique. Application au tri de gouttelettes

II.2.1) On a, par analogie : $\boxed{\Delta P = R_{hd}Q \Rightarrow R_{hd} = \dfrac{12\eta L}{h^3 w}}$

II.2.2) $r_e = R_{hd}$ est la résistance hydraulique <u>linéique</u> d'un canal de longueur L rempli d'eau

II.2.3) Pour une « cellule » de longueur λ, le schéma hydraulique équivalent est :



$$\begin{cases} R_e = \dfrac{12\eta_e}{h^3 w}(-Lg) \\ R_h = \dfrac{12\eta_h}{h^3 w} Lg \end{cases}$$

Pour l'ensemble des n cellules, la résistance hydraulique est :

$$R = n(R_e + R_h)$$

Soit : $R = n\dfrac{12}{h^3 w}[\eta_e(-\lambda - Lg) + \eta_h Lg] \Rightarrow R = n\, r_e\left[\lambda - Lg + \dfrac{\eta_h}{\eta_e} Lg\right]$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

Alors : $$\boxed{\Delta P = RQ_0 = nr_e\left[\lambda + \left(\frac{\eta_h}{\eta_e} - 1\right)Lg\right]Q_0} \qquad (\text{avec } n = \frac{L}{\lambda})$$

Pour $\eta_e << \eta_h$: $$\boxed{\Delta P \approx L\, r_e\left[1 + \frac{\eta_h}{\eta_e}\frac{Lg}{\lambda}\right]Q_0}$$

II.2.4) Par analogie : $\begin{cases} Q_0 = Q_1 + Q_2 \\ I_0 = I_1 + I_2 : \text{loi des nœuds} \end{cases}$

II.2.5) D'après II.2.1), $R_2 > R_1$ si $L_2 > L_1$, donc pour une même différence de pression ΔP : $\underline{Q_2 < Q_1}$: les gouttelettes d'huile sont orientées préférentiellement dans le bras 1.

II.2.6) * Lorsqu'un nombre croissant de gouttes pénètre dans le bras 1, R_1 augmente, donc Q_1 diminue, alors que Q_2 = cste. La condition $Q_2 < Q_1$ cessera donc d'être remplie : des gouttes passeront dans le bras 2, et le tri ne sera plus parfait.

* $\begin{cases} \text{Pour le bras 1 : } \Delta P = L_1 r_e\left(1 + \frac{Lg}{\lambda}\frac{\eta_h}{\eta_e}\right)Q_1 \\ \text{Pour le bras 2 : } \Delta P = L_2 r_e Q_2 \end{cases}$

Donc $Q_2 \le Q_1$ si : $$L_1\left(1 + \frac{Lg}{\lambda}\frac{\eta_h}{\eta_e}\right) \le L_2$$

Soit : $$\boxed{\frac{Lg}{\lambda} \le \frac{\eta_e}{\eta_h}\left(\frac{L_2 - L_1}{L_1}\right)}$$

II.3) Inertance hydraulique

II.3.1.a) La quantité de mouvement du fluide, en mouvement uniforme à la vitesse $\vec{v}(t)$, est :

$$\vec{p}(t) = m\,\vec{v}(t) = \rho LA\,\vec{v}(t)$$

Soit : $$\boxed{\vec{p}(t) = \rho LQ(t)\,\vec{x}}$$

b) Appliquons le théorème de la résultante cinétique au système fermé Σ^* de la question II.1.2) (mais cette fois en régime non permanent…) :

$$\frac{D\vec{p}^*}{Dt} = \Sigma\vec{F}_{ext}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

avec : $\vec{p}^*(t) = \vec{p}(t) + \delta m_1 \vec{v}(t)$

$$\vec{p}^*(t+dt) = \vec{p}(t+dt) + \delta m_2 \vec{v}(t+dt)$$

avec $\begin{cases} \delta m_1 = \rho A v(t) dt \\ \delta m_2 = \rho A v(t+dt) dt \end{cases}$

Donc : $\delta m_2 v(t+dt) - \delta m_1 v(t) = \rho A[(v+dv)^2 - v^2]dt$ est d'ordre supérieur ou égal à 2.

Ainsi : $$\frac{D\vec{p}^*}{Dt} = \frac{\vec{p}^*(t+dt) - \vec{p}^*(t)}{dt} \approx \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Par ailleurs : $\Sigma \vec{F}_{ext} = (\Delta P_i A)\vec{x}$ (viscosité négligée)

Ainsi : $$\frac{d\vec{p}}{dt} = (\Delta P_i A)\vec{x} = \rho L \frac{dQ}{dt}\vec{x} \Rightarrow \boxed{\Delta P_i = I_{hd}\frac{dQ}{dt}}$$

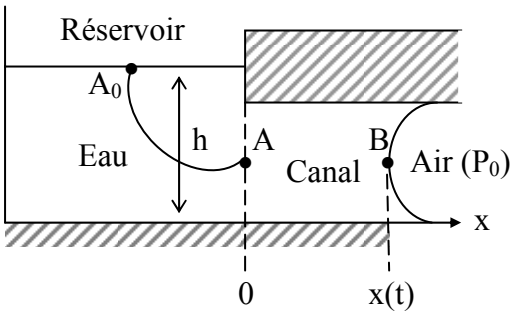
avec $\boxed{I_{hd} = \frac{\rho L}{A}}$

c) * I_{hd} représente l'inertie du fluide à se mettre en mouvement sous l'action d'une différence de pression.

* Analogie électrique : $\Delta V = \mathcal{L}\frac{dI}{dt}$

$I_{hd} \leftrightarrow \mathcal{L}$ (inductance propre)

II.4) Compliance hydraulique



II.4.1) a) * $\Delta P_{cap} = \frac{2\gamma}{h} = 14 \times 10^3$ Pa $= 0{,}14\ P_0$

* $\Delta P_{hyd} = \rho g h = 0{,}10$ Pa $<< \Delta P_{cap}$

Donc les effets capillaires prédominent et le fluide progresse dans le canal avec une courbure constante à l'interface.

b) Appliquons Bernoulli sur une ligne de courant de A_0 à A (fluide parfait, régime permanent, ρ = cste).

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g h = P_A + \frac{1}{2}\rho \dot{x}^2$$

Avec $v_0 \approx 0$ $\boxed{P_A - P_0 = -\frac{1}{2}\rho \dot{x}^2}$

Rem. : Dans le canal, la conservation du débit implique $v = v(t) = \dot{x}(t)$.

c) On a : * $P_A - P_B = (r_e x)\, Q = (r_e x)\,(A\dot{x})$ (Hagen-Poiseuille)

* $P_B - P_{air} = P_B - P_0 = -\frac{2\gamma}{h}$

D'où : $\boxed{P_A - P_0 = A r_e x \dot{x} - \frac{2\gamma}{h}}$

d) On en déduit l'équation différentielle qui régit x(t) :

$$\boxed{A r_e x \dot{x} - \frac{2\gamma}{h} = -\frac{1}{2}\rho \dot{x}^2}$$

e) * $[r_e] = \left[\frac{\eta}{h^3 w}\right] = \left[\frac{\eta}{h^4}\right]$

Donc : $[\theta] = \left[\frac{\rho}{r_e A}\right] = \left[\frac{\rho h^2}{\eta}\right] = \left[\frac{h^2}{\nu}\right] = [\tau]$

* $[b] = \left[\frac{1}{r_e A}\sqrt{\frac{\rho\gamma}{h}}\right] = \left[\frac{\theta}{\rho}\sqrt{\frac{\rho\gamma}{h}}\right] = \left[\theta\sqrt{\frac{\gamma}{\rho h}}\right] = \left[\theta\sqrt{\frac{P}{\rho}}\right] = [\theta v] = [\tau v]$

donc b est bien homogène à une longueur.

* • $\frac{dY}{dT} = \frac{\theta}{b}\frac{dx}{dt} \Rightarrow 4\left(\frac{dY}{dT}\right)^2 = 4\left(\frac{\theta}{b}\right)^2 \dot{x}^2 = \frac{\rho h}{4\gamma}\dot{x}^2$

• $4Y\frac{dY}{dT} = 4\frac{\theta}{b^2} x\dot{x} = \frac{r_e A}{2}\frac{h}{\gamma} x\dot{x}$

Or, l'équation obtenue en d) s'écrit aussi :

$$\frac{\rho h}{4\gamma}\dot{x}^2 + \frac{h}{2\gamma} A r_e x\dot{x} - 1 = 0$$

On obtient donc bien l'équation adimensionnée :

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.