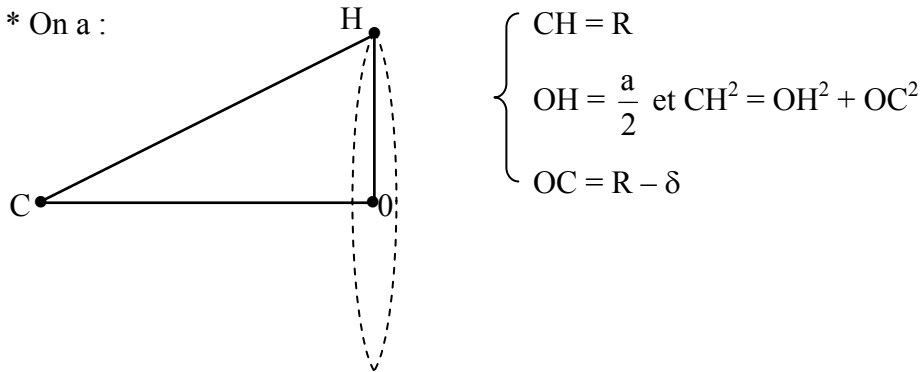


MODELISATION DES DUNES DE SABLE

I) Collisions sans perte d'énergie : modèle de Hertz

1) * Comme $[\delta] = a$, on a trivialement : $[P] = [\varepsilon]$

* On a :



D'où :

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + (R - \delta)^2 = \frac{a^2}{4} + R^2 + \delta^2 - 2 R \delta$$

Au 1^{er} ordre en δ/R , on a donc : $0 \approx \frac{a^2}{4} - 2 R \delta$, soit :

$$a \approx 2 \sqrt{2 R \delta}$$

2) * Le module de la force de déformation s'écrit : $F_{de} = \varepsilon 4 \Pi a \delta$

Soit, compte tenu du résultat précédent :

$$F_{de} \approx \varepsilon 8 \Pi \sqrt{2} R^{1/2} \delta^{3/2}$$

* On a : $\vec{F}_{de}(\delta) = - \frac{dE_p}{d\delta} \vec{x} = - F_{de} \vec{x}$, si on considère $\vec{F}_{de} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$, et $\vec{x} = \frac{\vec{O}_1 O_2}{O_1 O_2}$

Ainsi :

$$F_{de} = \varepsilon 8 \Pi \sqrt{2} R^{1/2} \delta^{3/2} = \frac{dE_p}{d\delta} \Rightarrow E_p(\delta) = \varepsilon \frac{16 \Pi \sqrt{2}}{S} R^{1/2} \delta^{5/2} + cste$$

Soit :

$$E_p(\delta) = \varepsilon \frac{16 \Pi \sqrt{2}}{S} R^{1/2} \delta^{5/2} \quad \text{avec le choix arbitraire } E_p(\delta = 0) = 0$$

3) * On a trivialement : $x_2 - x_1 = 2 R - 2 \delta$

* Alors : $\dot{x}_2 - \dot{x}_1 = - 2 \dot{\delta}$

Énoncé en fin de document.

Or, pendant la collision : $\overset{\circ}{x}_2 = -\overset{\circ}{x}_1$, de sorte que :

$$\overset{\circ}{x}_1 = \delta$$

4) Pendant le choc : $E_c = 2 E_{c_1} = m \overset{\circ}{\delta}^2$

Donc :

$$E_m = E_c + E_p = m \overset{\circ}{\delta}^2 + \varepsilon' R^{1/2} \delta^{5/2}$$

$$(\varepsilon' = \frac{16 \Pi \sqrt{2}}{S} \varepsilon)$$

5) * Le système des 2 billes est isolé en référentiel galiléen : il y a conservation de \vec{P} de l'ensemble.

* Ainsi :

$$\underbrace{\vec{O}}_{\text{avant}} = \underbrace{m \vec{w}_1 + m \vec{w}_2}_{\text{après}}$$

($\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$)

Donc :

$$\vec{w}_2 = -\vec{w}_1$$

6) Il y a de même conservation de l'énergie mécanique, donc ici de l'énergie cinétique :

$$\underbrace{m v_1^2}_{\text{avant}} = \underbrace{m w_1^2}_{\text{après}} \Rightarrow \boxed{v_1 = v = w_1 = w}$$

7) Toujours par conservation de l'énergie mécanique totale :

$$\underbrace{m v^2 + E_p(\delta=0)}_{\text{avant le choc}} = \underbrace{m \overset{\circ}{\delta}^2 + \varepsilon' R^{1/2} \delta^{5/2}}_{\text{pendant le choc}}$$

La valeur maximale de δ correspond à $\overset{\circ}{\delta} = 0$, d'où : $m v^2 = \varepsilon' R^{1/2} \delta_m^{5/2}$

Soit :

$$\rho_b \frac{4}{3} \Pi R^3 v^2 = \frac{16 \Pi \sqrt{2}}{5} \varepsilon R^{1/2} \delta^{5/2} \Rightarrow \boxed{\delta_m = R \left[\frac{5}{12 \sqrt{2}} \frac{\rho_b v^2}{\varepsilon} \right]^{2/5}}$$

Donc $u_m = \frac{\delta_m}{R}$ ne dépend que de la nature des billes (ρ_b, ε) et de leur vitesse v avant le choc.

8) On peut écrire l'intégrale 1^{ère} de l'énergie sous la forme :

$$m \overset{\circ}{\delta}^2 = \varepsilon' R^{1/2} (\delta_m^{5/2} - \delta^{5/2})$$

Soit, par séparation des variables :

$$\frac{d\delta}{[\delta_m^{5/2} - \delta^{5/2}]^{1/2}} = \pm \left(\frac{\varepsilon'}{m} \right)^{1/2} R^{1/4} dt$$

Énoncé en fin de document.

Par « symétrie temporelle », on peut se limiter la phase où δ augmente (i.e. pendant la durée $\frac{\tau}{2}$) : $\dot{\delta} > 0$

Ainsi :

$$\int_{\delta=0}^{\delta_m} \frac{dS}{[\delta_m^{5/2} - \delta^{5/2}]^{1/2}} = + \left(\frac{\varepsilon'}{m}\right)^{1/2} R^{1/4} dt \int_0^{\tau/2} dt$$

En posant $x = \frac{\delta}{\delta_m}$, on tire :

$$\int_{x=0}^1 \underbrace{\frac{\delta_m}{\delta_m^{5/2}} \frac{dx}{[1-x^{5/2}]^{1/2}}}_{\delta_m^{-1/4} I} = \left(\frac{\varepsilon'}{m}\right)^{1/2} R^{1/4} \frac{\tau}{2}$$

Ainsi :

$$\tau = 2 \left[\frac{m}{\varepsilon' \sqrt{R \delta_m}} \right]^{1/2} I \quad \text{ou encore en introduisant } v : \quad \tau = 2 \left[\frac{m^2}{\varepsilon'^2 R v} \right]^{1/5} I$$

Rem. : $[\tau^5] = \left[\frac{m^2}{\varepsilon'^2 R v} \right] = \left[\frac{m^2}{F^2 R^3 v} \right] = \left[\frac{m^2}{\left(\frac{mv}{\tau}\right)^2 R^3 v} \right] = \left[\frac{\tau^2}{R^3 v^3} \right] \quad \text{car } [\varepsilon'] = \left[\frac{F}{R^2} \right]$

ce qui assure l'homogénéité de l'expression obtenue pour τ .

9) A.N. : $\varepsilon' = 9,85 \times 10^{10} \text{Pa}$

* $R = 10^{-4}$; $m = 1,05 \times 10^{-8} \text{kg}$

$$\begin{cases} \tau = 3,8 \times 10^{-7} \text{s} \\ u_m = \left(\frac{mv^2}{\varepsilon' R^3} \right)^{2/5} = 3,9 \times 10^{-4} \end{cases}$$

* $R' = 10^{-3} \text{m} = 10 R$; $m' = 10^3 m$

$$\begin{cases} \tau' = 10 t = 3,8 \times 10^{-6} \text{s} \\ u'_m = u_m \end{cases}$$

II – Collisions avec perte d'énergie

10) Le système des deux billes est isolé ; l'étude se fait en référentiel galiléen : il y a conservation de la quantité de mouvement du système.

11) On a donc :

$$\begin{cases} mv_1 + mv_2 = mw_1 + mw_2 \\ w_2 - w_1 = -e(v_2 - v_1) \end{cases}$$

Enoncé en fin de document.

D'où l'on tire :

$$\begin{cases} w_1 = \frac{v_1(1-e) + v_2(1+e)}{2} \\ w_2 = \frac{v_1(1+e) + v_2(1-e)}{2} \end{cases}$$

* Avant le choc : $E_c = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2$

* Après le choc : $E'_c = \frac{1}{2} m w_1^2 + \frac{1}{2} m w_2^2$

Donc : $\Delta E_c = E'_c - E_c = \frac{1}{2} m [w_1^2 + w_2^2 - v_1^2 - v_2^2]$

Avec : $w_1^2 + w_2^2 = \frac{(v_1^2 + v_2^2)(1+e^2) + 2 v_1 v_2 (1-e^2)}{2}$

D'où : $\Delta E_c = \frac{1}{4} m [(v_1^2 + v_2^2)(e^2 - 1) + 2 v_1 v_2 (1 - e^2)]$

Soit finalement :

$$\Delta E_c = -\frac{1}{4} m (1 - e^2) (v_1 - v_2)^2 \leq 0$$

(pour un choc élastique, $e = 1$ et $\Delta E_c = 0$).

12) Pour un choc de plein fouet : $v_1 = -v_2 = v$, donc : $\Delta E_c = -m(1 - e^2) v^2$

13) * $\left[\frac{\partial F_{dc}}{\partial \delta} \right] = \left[\frac{F}{\tau} \right] = \left[\frac{F_d}{A} \right]$, de sorte que A est homogène à un temps

* Avec $F_{dc} = \varepsilon 8 \Pi \sqrt{2} R^{1/2} \delta^{3/2}$: $\frac{\partial F_{dc}}{\partial \delta} = \varepsilon 12 \Pi \sqrt{2} R^{1/2} \delta^{1/2}$

Ainsi : $F_d = A \delta \varepsilon 12 \Pi \sqrt{2} R^{1/2} \delta^{1/2}$ (pour $\delta > 0$)

* L'énergie dissipée au cours de la collision (définie positivement) est donc :

$$U_d = 2 \left[\underbrace{2 \int_{\delta=0}^{\delta_m} F_d dS}_{\text{pour une bille}} \right]$$

14) Si $U_d = |\Delta E_c|$ est faible devant E_c , on peut encore utiliser l'intégrale première de l'énergie de la question 7 :

$$m v^2 \approx m \delta^{\circ 2} + \varepsilon' R^{1/2} \delta^{5/2} \Rightarrow \delta^{\circ 2} = v^2 \left[1 - \frac{\varepsilon' R^{1/2} \delta^{5/2}}{m v^2} \right] \quad (\text{avec } \varepsilon' = \frac{16 \Pi \sqrt{2}}{5} \varepsilon)$$

Enoncé en fin de document.

Avec toujours : $mv^2 = \varepsilon'R^{1/2}\delta_m^{5/2}$

D'où : $m\delta_m^{\circ 2} = \varepsilon'R^{1/2}(\delta_m^{5/2} - \delta^{5/2})$ (cf question 8) directement...

Soit : $m\delta_m^{\circ 2} = \varepsilon'R^{1/2}\delta_m^{5/2}(1 - y^{5/2})$ si $y = \frac{\delta}{\delta_m}$

15) On a alors : $F_d = \left(\frac{A \varepsilon 12 \Pi \sqrt{2} R^{1/2} \delta^{1/2}}{m^{1/2}} \right) (\varepsilon'^{1/2} R^{1/4} \delta_m^{5/4} (1 - y^{5/2})^{1/2})$

Soit : $F_d = \frac{A \varepsilon \sqrt{\varepsilon'} 12 \Pi \sqrt{2} R^{3/4} \delta_m^{7/4}}{m^{1/2}} \sqrt{y(1 - y^{5/2})}$

Puis : $U_d = 4 \int_{y=0}^1 F_d \delta_m dy$

Soit : $U_d = \frac{48 \Pi \sqrt{2} \varepsilon \varepsilon'^{1/2} A R^{3/4} \delta_m^{11/4}}{m^{1/2}} \int_{y=0}^1 y \sqrt{(1 - y^{5/2})} dy$

Comme v^2 est proportionnelle à $\delta_m^{5/2}$, on en déduit que U_d est proportionnelle à $v^{11/5}$:

$\beta = \frac{11}{5}$ (voisin de 2...)

Rem. : $[U_d^2] = \left[\frac{\varepsilon^3 A^2 R^7}{m} \right]$

Or : $[\varepsilon] = [FR^2] = \left[\frac{U}{R^3} \right]$

Donc : $[U_d^2] = \left[\frac{U^3 \tau^2}{m R^2} \right] = \left[U^2 \times \frac{U}{m R^2 \omega^2} \right] = [U^2]$, ce qui assure l'homogénéité de

l'expression obtenue pour U_d .

16) On a : $U_d = mv^2(1 - e^2)$ proportionnelle à $v^{11/5}$, de sorte que $1 - e^2$ est proportionnelle à $v^{1/5}$.

Or, pour $e \rightarrow 1$: $(1 - e^2) \approx 2(1 - e) = K v^{1/5} \Rightarrow 1 - e = \frac{K}{2} v^{1/5}$

17) * Le résultat précédent fournit en particulier : $\left(\begin{array}{l} a \rightarrow 1 : \text{aux faibles vitesses, les} \\ v \rightarrow 0 \end{array} \right.$ collisions tendent à devenir élastiques (très faible dissipation d'énergie).