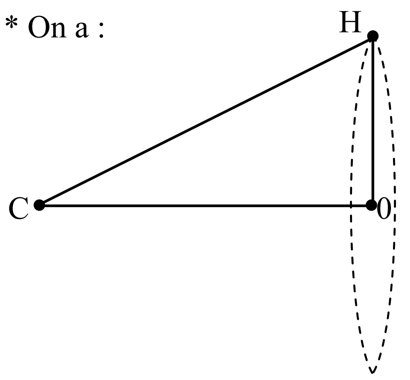
MODELISATION DES DUNES DE SABLE

I) Collisions sans perte d'énergie : modèle de Hertz

1) * Comme $[\delta] = a$, on a trivialement : $[P] = [\varepsilon]$

* On a :



$$\begin{cases} CH = R \\ OH = \dfrac{a}{2} \text{ et } CH^2 = OH^2 + OC^2 \\ OC = R - \delta \end{cases}$$

D'où : $R^2 = \dfrac{a^2}{4} + (R-\delta)^2 = \dfrac{a^2}{4} + R^2 + \delta^2 - 2\,R\delta$

Au 1er ordre en δ/R, on a donc : $O \approx \dfrac{a^2}{4} - 2\,R\delta$, soit :

$$\boxed{a \approx 2\sqrt{2\,R\delta}}$$

2) * Le module de la force de déformation s'écrit : $F_{de} = \varepsilon\, 4\, \Pi\, a\, \delta$

Soit, compte tenu du résultat précédent :

$$\boxed{F_{de} \approx = \varepsilon\, 8\, \Pi \sqrt{2}\; R^{1/2}\delta^{3/2}}$$

* On a : $\vec{F}_{de}(\delta) = -\dfrac{dE_p}{d\delta}\vec{x} = -F_{de}\,\vec{x}$, si on considère $\vec{F}_{de} = \vec{F}_{2\to1}$, et $\vec{x} = \dfrac{\overrightarrow{O_1O_2}}{O_1O_2}$

Ainsi : $F_{de} = \varepsilon\, 8\, \Pi \sqrt{2}\; R^{1/2}\delta^{3/2} = \dfrac{dE_p}{d\delta} \Rightarrow E_p(\delta) = \varepsilon\, \dfrac{16\,\Pi\sqrt{2}}{S}\, R^{1/2}\delta^{5/2} + \text{cste}$

Soit : $\boxed{E_p(\delta) = \varepsilon\, \dfrac{16\,\Pi\sqrt{2}}{S}\, R^{1/2}\delta^{3/2}}$ avec le choix arbitraire $E_p(\delta = 0) = 0$

3) * On a trivialement : $x_2 - x_1 = 2\,R - 2\,\delta$

* Alors : $\overset{\circ}{x}_2 - \overset{\circ}{x}_1 = -2\,\overset{\circ}{\delta}$

Mines PSI II – 2008

Enoncé en fin de document.

Or, pendant la collision : $\dot{x}_2 = -\dot{x}_1$, de sorte que : $\boxed{\dot{x}_1 = \dot{\delta}}$

4) Pendant le choc : $E_c = 2\ E_{c_1} = m\dot{\delta}^2$

Donc : $\boxed{E_m = E_c + E_p = m\dot{\delta}^2 + \varepsilon' R^{1/2}\delta^{5/2}}$ $\quad (\varepsilon' = \dfrac{16\Pi\sqrt{2}}{S}\ \varepsilon)$

5) * Le système des 2 billes est <u>isolé</u> en référentiel <u>galiléen</u> : il y a conservation de $\vec{P}$ de l'ensemble.

* Ainsi : $\underbrace{\vec{O}}_{\text{avant}} = \underbrace{m\vec{w}_1 + m\vec{w}_2}_{\text{après}}$

$(\vec{v}_2 = -\vec{v}_1)$

Donc : $\boxed{\vec{w}_2 = -\vec{w}_1}$

6) Il y a de même conservation de l'énergie mécanique, donc ici de l'énergie cinétique :

$$\underbrace{mv_1^2}_{\text{avant}} = \underbrace{mw_1^2}_{\text{après}} \Rightarrow \boxed{v_1 = v = w_1 = w}$$

7) Toujours par conservation de l'énergie mécanique totale :

$$\underbrace{mv^2 + \underbrace{E_p(\delta = 0)}_{0}}_{\text{avant le choc}} = \underbrace{m\dot{\delta}^2 + \varepsilon' R^{1/2}\delta^{5/2}}_{\text{pendant le choc}}$$

La valeur maximale de δ correspond à $\dot{\delta} = 0$, d'où : $mv^2 = \varepsilon' R^{1/2}\delta_m^{5/2}$

Soit : $\rho_b\ \dfrac{4}{3}\ \Pi R^3 v^2 = \dfrac{16\Pi\sqrt{2}}{5}\ \varepsilon R^{1/2}\delta^{5/2} \Rightarrow \boxed{\delta_m = R\left[\dfrac{5}{12\sqrt{2}}\ \dfrac{\rho_b v^2}{\varepsilon}\right]^{2/5}}$

Donc $u_m = \dfrac{\delta_m}{R}$ ne dépend que de la nature des billes (ρ_b,ε) et de leur vitesse v avant le choc.

8) On peut écrire l'intégrale 1ère de l'énergie sous la forme :

$$m\dot{\delta}^2 = \varepsilon' R^{1/2}(\delta_m^{5/2} - \delta^{5/2})$$

Soit, par séparation des variables :

$$\frac{d\delta}{[\delta_m^{5/2} - \delta^{5/2}]^{1/2}} = \pm\left(\frac{\varepsilon'}{m}\right)^{1/2} R^{1/4} dt$$

Enoncé en fin de document.

Par « symétrie temporelle », on peut se limiter la phase où δ augmente (i.e. pendant la durée $\frac{\tau}{2}$) : $\overset{o}{\delta} > 0$

Ainsi : $$\int_{\delta=0}^{\delta_m} \frac{dS}{[\delta_m{}^{5/2} - \delta^{5/2}]^{1/2}} = +\left(\frac{\varepsilon'}{m}\right)^{1/2} R^{1/4} dt \int_0^{\tau/2} dt$$

En posant $x = \frac{\delta}{\delta_m}$, on tire :

$$\underbrace{\int_{x=0}^{1} \frac{\delta_m}{\delta_m{}^{5/2}} \frac{dx}{[1-x^{5/2}]^{1/2}}}_{\delta_m{}^{-1/4}\, I} = \left(\frac{\varepsilon'}{m}\right)^{1/2} R^{1/4} \frac{\tau}{2}$$

Ainsi : $\boxed{\tau = 2\left[\frac{m}{\varepsilon'\sqrt{R\delta_m}}\right]^{1/2} I}$ ou encore en introduisant v : $\boxed{\tau = 2\left[\frac{m^2}{\varepsilon'^2\, Rv}\right]^{1/5} I}$

Rem. : $[\tau^5] = \left[\frac{m^2}{\varepsilon'^2\, Rv}\right] = \left[\frac{m^2}{F^2 R^3 v}\right] = \left[\frac{m^2}{\left(\frac{mv}{\tau}\right)^2 R^3 v}\right] = \left[\frac{\tau^2}{R^3 v^3}\right]$ car $[\varepsilon'] = \left[\frac{F}{R^2}\right]$

ce qui assure l'homogénéité de l'expression obtenue pour τ.

9) ***A.N.*** : $\varepsilon' = 9{,}85 \times 10^{10}$Pa

* $R = 10^{-4}$; $m = 1{,}05 \times 10^{-8}$kg
$$\begin{cases} \tau = 3{,}8 \times 10^{-7}\text{s} \\ u_m = \left(\frac{mv^2}{\varepsilon' R^3}\right)^{2/5} = 3{,}9\ 10^{-4} \end{cases}$$

* $R' = 10^{-3}$m $= 10$ R ; $m' = 10^3$m
$$\begin{cases} \tau' = 10\, t = 3{,}8 \times 10^{-6}\text{s} \\ u'_m = u_m \end{cases}$$

II – Collisions avec perte d'énergie

10) Le système des deux billes est <u>isolé</u> ; l'étude se fait en référentiel <u>galiléen</u> : il y a <u>conservation de la quantité de mouvement du système</u>.

11) On a donc :
$$\begin{cases} mv_1 + mv_2 = mw_1 + mw_2 \\ w_2 - w_1 = -e(v_2 - v_1) \end{cases}$$

Enoncé en fin de document.

D'où l'on tire : $\begin{cases} w_1 = \dfrac{v_1(1-e)+v_2(1+e)}{2} \\ w_2 = \dfrac{v_1(1+e)+v_2(1-e)}{2} \end{cases}$

* Avant le choc : $E_c = \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} mv_2^2$

* Après le choc : $E'_c = \frac{1}{2} mw_1^2 + \frac{1}{2} mw_2^2$

Donc : $\Delta E_c = E'_c - E_c = \frac{1}{2} m [w_1^2 + w_2^2 - v_1^2 - v_2^2]$

Avec : $w_1^2 + w_2 = \dfrac{(v_1^2 + v_2^2)(1+e^2) + 2 v_1 v_2 (1-e^2)}{2}$

D'où : $\Delta E_c = \frac{1}{4} m [(v_1^2 + v_2^2)(e^2 - 1) + 2 v_1 v_2 (1 - e^2)]$

Soit finalement : $\boxed{\Delta E_c = -\frac{1}{4} m (1 - e^2)(v_1 - v_2)^2 \leq 0}$

(pour un choc élastique, e = 1 et $\Delta E_c = 0$).

12) Pour un choc de plein fouet : $v_1 = -v_2 = v$, donc : $\boxed{\Delta E_c = -m(1 - e^2) v^2}$

13) * $\left[\overset{o}{\delta} \dfrac{\partial F_{de}}{\partial \delta}\right] = \left[\dfrac{F}{\tau}\right] = \left[\dfrac{F_d}{A}\right]$, de sorte que A est homogène à un temps

* Avec $F_{de} = \varepsilon\, 8\, \Pi \sqrt{2}\, R^{1/2} \delta^{3/2}$: $\dfrac{\partial F_{de}}{\partial \delta} = \varepsilon\, 12\, \Pi \sqrt{2}\, R^{1/2} \delta^{1/2}$

Ainsi : $\underline{F_d = A \overset{o}{\delta}\, \varepsilon\, 12\, \Pi \sqrt{2}\, R^{1/2} \delta^{1/2}}$ (pour $\overset{o}{\delta} > 0$)

* L'énergie dissipée au cours de la collision (définie positivement) est donc :

$$\boxed{U_d = 2 \underbrace{\left[2 \int_{\delta=0}^{\delta_m} F_d dS\right]}_{\text{pour une bille}}}$$

14) Si $U_d = |\Delta E_c|$ est faible devant E_c, on peut encore utiliser l'intégrale première de l'énergie de la question 7 :

$$mv^2 \approx m \overset{o}{\delta}{}^2 + \varepsilon' R^{1/2} \delta^{5/2} \Rightarrow \overset{o}{\delta}{}^2 = v^2 \left[1 - \frac{\varepsilon' R^{1/2} \delta^{5/2}}{mv^2}\right] \quad (\text{avec } \varepsilon' = \frac{16 \Pi \sqrt{2}}{5} \varepsilon)$$

Avec toujours : $mv^2 = \varepsilon' R^{1/2}\delta_m^{5/2}$

D'où : $m\overset{o}{\delta}{}^2 = \varepsilon' R^{1/2}(\delta_m^{5/2} - \delta^{5/2})$ (cf question 8) directement…)

Soit : $\boxed{m\overset{o}{\delta}{}^2 = \varepsilon' R^{1/2}\delta_m^{5/2}(1 - y^{5/2})}$ si $y = \dfrac{\delta}{\delta_m}$

15) On a alors : $F_d = \left(\dfrac{A\,\varepsilon\,12\,\Pi\sqrt{2}\,R^{1/2}\delta^{1/2}}{m^{1/2}}\right)(\varepsilon'^{1/2}R^{1/4}\delta_m^{5/4}(1-y^{5/2})^{1/2})$

Soit : $F_d = \dfrac{A\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon'}\,12\,\Pi\sqrt{2}\,R^{3/4}\delta_m^{7/4}}{m^{1/2}}\sqrt{y(1-y^{5/2})}$

Puis : $U_d = 4\displaystyle\int_{y=0}^{1} F_d\,\delta_m dy$

Soit : $\boxed{U_d = \dfrac{48\,\Pi\sqrt{2}\,\varepsilon\varepsilon'^{1/2}\,AR^{3/4}\delta_m^{11/4}}{m^{1/2}}\displaystyle\int_{y=0}^{1} y\sqrt{(1-y^{5/2})}\,dy}$

Comme v^2 est proportionnelle à $\delta_m^{5/2}$, on en déduit que U_d est proportionnelle à $v^{11/5}$:

$\boxed{\beta = \dfrac{11}{5}}$ (voisin de 2…)

Rem. : $[U_d^2] = \left[\dfrac{\varepsilon^3 A^2 R^7}{m}\right]$

Or : $[\varepsilon] = [FR^2] = \left[\dfrac{U}{R^3}\right]$

Donc : $[U_d^2] = \left[\dfrac{U^3\tau^2}{mR^2}\right] = \left[U^2 \text{ x } \dfrac{U}{mR^2w^2}\right] = [U^2]$, ce qui assure l'homogénéité de l'expression obtenue pour U_d.

16) On a : $U_d = mv^2(1 - e^2)$ proportionnelle à $v^{11/5}$, de sorte que $1 - e^2$ est proportionelle à $v^{1/5}$.

Or, pour $e \to 1$: $(1 - e^2) \approx 2(1 - e) = Kv^{1/5} \Rightarrow \boxed{1 - e = \dfrac{K}{2}v^{1/5}}$

17) * Le résultat précédent fournit en particulier : $\begin{cases} a \to 1 \\ v \to 0 \end{cases}$: aux faibles vitesses, les collisions tendent à devenir élastiques (très faible dissipation d'énergie).