

## A propos du débitmètre à effet Coriolis

### Partie I – Etude préliminaire

I.A) \* Loi de composition des vitesses

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

\* Alors, pour  $\vec{\Omega} = \text{cste}$  :

$$\vec{a} = \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_R = \left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_R + \vec{\Omega} \wedge \left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_R = \left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}' = \vec{a}' + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}' \\ \left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R = \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}'$$

(loi de composition des accélérations).

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_e = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) = -\Omega^2 X \vec{X} \\ \vec{a}_c = 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}' = 2 \Omega v' \vec{Y} \end{array} \right.$$

I.B.1) Dans (R') :  $\vec{a}' = \vec{0}$  ( $v' = \text{cste}$ ), donc :

$$\vec{O} = m\vec{g} + \vec{R}_{T \rightarrow M} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c + \vec{F}$$

En l'absence de frottements :

$$\vec{R}_{T \rightarrow M} \cdot \vec{X} = 0, \text{ de sorte que :}$$

$$F = -m\Omega^2 X \quad (\text{pour maintenir } v' = \text{cste})$$

et

$$\left( \begin{array}{c|c} \vec{R}_{T \rightarrow M} & 0 \\ \hline (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) & 2 m\Omega v' \\ & mg \end{array} \right)$$

Énoncé en fin de document.

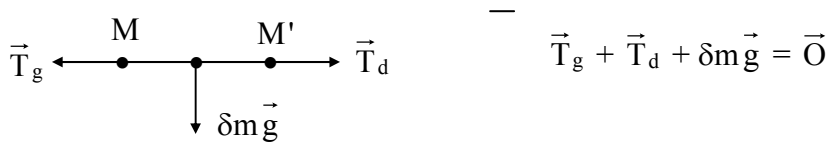
I.B.2) Principe des actions réciproques (3<sup>e</sup> loi de Newton)

$$\vec{R}_{T \rightarrow M} = - \vec{R}_{M \rightarrow T}$$

Partie II – Principe du débitmètre à effet Coriolis

II.A) Etude des vibrations du tube en absence de fluide

II.A.1) Au repos, pour un brin élémentaire de longueur  $dy$  :

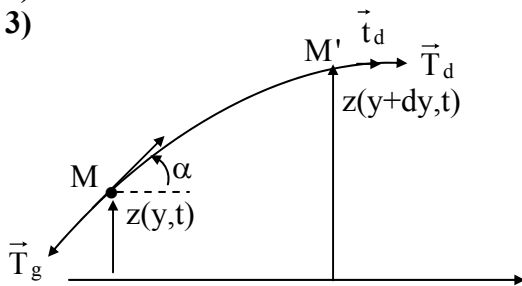


Comme le tube est supposé confondu avec l'axe Oy, on en déduit :

$$\begin{cases} \vec{T}_g + \vec{T}_d = \vec{0} : T_g = T_d = T_0 \\ \delta m \vec{g} = \vec{0} \text{ , ce qui revient à négliger les effets de la pesanteur} \end{cases}$$

II.A.2) En mouvement

3)



$$\delta m \vec{a}(M,t) = \cancel{\delta m \vec{g}} + \vec{T}_g + \vec{T}_d$$

négligé

Avec :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$$

Or :

$$\vec{v} = v(y,t) \vec{z} \quad (\text{hypothèse H II.2})$$

Donc :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = v \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \vec{0}$$

En projection sur  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ , l'équation du mouvement du brin MM' de corde s'écrit donc :

Enoncé en fin de document.

$$\begin{cases} \delta m = \frac{\partial v_z}{\partial t} = (T \sin \alpha)_{y+dy} - (T \sin \alpha)_y & (1) \\ O = (T \cos \alpha)_{y+dy} - (T \cos \alpha)_y & (2) \end{cases}$$

Comme  $\alpha \rightarrow 0$  (hypothèse H.II.3) (2) donne :

$$T_{y+dy} = T_y = \text{cste } T_0$$

Puis, (1) s'écrit alors :

$$\delta m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial}{\partial y} (\sin \alpha) dy$$

Avec toujours :

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial z}{\partial y}$$

D'où :

$$\delta m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy$$

Enfin :

$$\delta m = \mu ds \quad (ds = \widehat{MM'I}) = \mu \frac{dy}{\cos \alpha} \approx \mu dy$$

Et finalement :

$$\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad (E_1)$$

**II.A.4)** On obtient une équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \quad \text{si} \quad C = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

La solution la plus générale est :  $z(y,t) = z^+ \left(t - \frac{y}{C}\right) + z^- \left(t + \frac{y}{C}\right)$ , superposition de 2 OPP se propageant selon 0y croissant et décroissant respectivement..

**II.A.5) a)** On cherche une solution sous forme d'onde stationnaire (i.e. non progressive) :

$$z(y,t) = f(y)g(t)$$

**b)** Alors, l'équation (E<sub>1</sub>) s'écrit :

$$f''(y)g(t) = \frac{1}{C^2} f(y) g''(t)$$

Soit :

$$\underbrace{\frac{g''(t)}{g(t)}}_{G(t)} = C^2 \underbrace{\frac{f''(y)}{f(y)}}_{F(y)}, \text{ donc } = \text{cste}$$

• Si  $\text{cste} > 0$ , on aurait  $f(y) = F_1 \text{ch}(ky) + F_2 \text{sh}(ky)$  qui ne peut satisfaire aux conditions aux limites  $f(0) = f(D) = 0$  sauf à être identiquement nulle.

**Énoncé en fin de document.**

• Si  $cste = 0$ , on aurait  $f(y) = F_1 y + F_2$ , et de même les conditions aux limites ne peuvent être satisfaites.

Donc nécessairement :  $cste = -w^2 < 0$

Alors :  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(t) + w^2 g(t) = 0$

$$f''(y) + \underbrace{\frac{w^2}{C^2}}_{k^2} = f(y) = 0$$

D'où :

$$z(y,t) = Z \cos(wt + \varphi) \sin(ky + \psi)$$

avec

$$k = \frac{w}{C}$$

c) \* Conditions aux limites :  $z(0,t) = z(L,t) = 0, \forall t$

$$\Rightarrow \psi = 0$$

$$kL = p\pi, p \in \mathbb{N}^* : k_p = \frac{p\pi}{L}$$

\* Dispositif excitateur :  $z\left(\frac{L}{2}, t\right) = Z_0 \cos(2\pi ft), \forall t$

$$\Rightarrow Z \cos(wt + \varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) = Z_0 \cos(2\pi ft)$$

## II.B) Interaction entre le fluide en écoulement et le tube vibrant

II.B.1) Écoulement incompressible :  $\text{div } \vec{v} = 0$

Soit, en négligeant la courbure du tube (au 1<sup>er</sup> ordre) :  $\frac{dv}{dy} = 0$  :  $v(M)$  uniforme.

II.B.2) Dans le cadre d'un écoulement parfait, la force exercée par le tube sur le fluide est localement normale au tube, i.e. dirigée selon  $\vec{Z}$ .

II.B.3) Forces s'exerçant sur la particule de fluide dans ( $R'$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ Poids } \delta m \vec{g} = \rho s dy \vec{g} \\ * \text{ Forces de pression : } - \overrightarrow{\text{grad}} P \delta V = - \overrightarrow{\text{grad}} P (s dy) \\ * \text{ Forces d'inertie } \delta \vec{F}_{i_e} \text{ et } \delta \vec{F}_{i_c} \\ * \delta \vec{F}(T \rightarrow F) \end{array} \right.$$

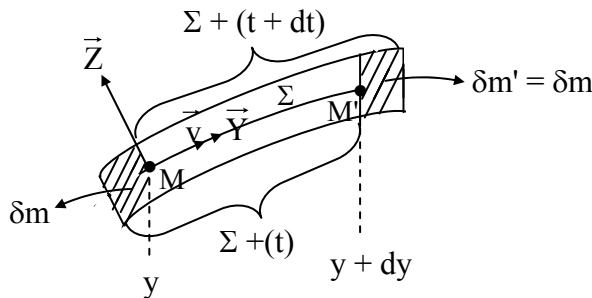
**Énoncé en fin de document.**

Rem. :  $\vec{\Omega}(R'/R) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \vec{z}$ , avec  $\alpha \approx \frac{\partial z}{\partial y}$ , ce qui justifie l'expression de  $\vec{a}_c$  donnée par l'énoncé.

II.B.4.) \*  $\delta \vec{F}_{ie} = -\delta m \vec{a}_e = -\delta m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \vec{z}$

\*  $\delta \vec{F}_{ic} = -\delta m \vec{a}_c = 2 \delta m \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} v \vec{z}$

II.B.5)



$$\begin{cases} \delta \vec{p}^*(t) = \delta \vec{p}(t) = \delta m v \vec{Y} \\ \delta \vec{p}^*(t+dt) = \delta \vec{p}(t+dt) + \delta m' v \vec{Y}' \end{cases}$$

Avec  $\delta \vec{p}(t) = \delta \vec{p}(t+dt)$  (régime permanent dans (R')).

De plus :  $\vec{Y} = \cos \alpha \vec{y} + \sin \alpha \vec{z} \approx \vec{y} + \alpha \vec{z}$

$\vec{Y}' = \cos \alpha' \vec{y} + \sin \alpha' \vec{z} \approx \vec{y} + \alpha' \vec{z}$

Donc :  $\vec{Y}' - \vec{Y} \approx (\alpha' - \alpha) \vec{z} = (\alpha' - \alpha) [\cos \alpha \vec{z} - \sin \alpha \vec{Y}]$

$\approx (\alpha' - \alpha) \vec{z}$  au 1<sup>er</sup> ordre en  $\alpha$

$\approx \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y+dy} - \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_y \right] \vec{z}$

$\approx dy \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \vec{z}$

Finalement :  $\frac{d}{dt} (\delta \vec{p}^*) = \frac{\delta \vec{p}^*(t+dt) - \delta \vec{p}^*(t)}{dt} \approx \frac{\delta m}{dt} v dy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \vec{z}$

Soit :

$\frac{d}{dt} (\delta \vec{p}^*) = D_m v dy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \vec{z}$

**Énoncé en fin de document.**

**II.B.6)** En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la particule de fluide dans ( $R'$ ), on obtient :

$$\frac{d}{dt} (\delta \vec{p}^*) = \delta m \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P \delta V + \delta \vec{F}_{T \rightarrow F} + \delta \vec{F}_{i_e} + \delta \vec{F}_{i_c}$$

Avec  $P = P(y)$  et  $\vec{Z} \cdot \vec{Z} = \cos \alpha \approx 1$  au 1<sup>er</sup> ordre, on déduit par projection sur  $\vec{Z}$  :

$$D_m v \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \vec{Z} \approx -\rho s dy g \vec{Z} + \overbrace{\delta \vec{F}_{T \rightarrow F}}^{-\delta \vec{F}_{F \rightarrow T}} - \rho s dy \left[ 2v \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right] \vec{Z}$$

Soit finalement, puisque  $\rho s v = D_m$  :

$$(2) \quad \delta \vec{F}_{F \rightarrow T} = - \left[ g + \rho s \left( \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) + D_m \left( 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} + v \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \right] dy \vec{Z}$$

**II.B.7) a)** Origine des 4 termes

- \* Poids du fluide
- \* Effets de  $\vec{a}_e$  (accélération verticale du tronçon de tube)
- \* Effet de  $\vec{a}_c$  (rotation dans ( $R$ ) du tronçon de tube)
- \* Variation de l'orientation de l'écoulement du fluide, en raison de la courbure du tube

**b)** Entre  $t$  et  $t + dt$ , le tronçon a tourné ( $\alpha = \frac{\partial z}{\partial y}$  a varié), donc les molécules de fluide ont changé de direction de déplacement dans ( $R$ ), d'où une force du tube sur le fluide opposée à  $\delta \vec{F}_{F \rightarrow T}$ .

**II.C) Etude des vibrations du tube en présence d'un écoulement**

**II.C.1)** Pour le tube au repos :

$$\delta \vec{F}_{0(F \rightarrow T)} = -\rho s g dy \vec{Z}$$

Comme le tube au repos parcouru par l'écoulement de fluide est confondu avec l'axe horizontal  $Oy$  :

$$\delta \vec{F}_{0(F \rightarrow T)} \approx \vec{0} \quad (\text{poids de la particule de fluide négligé})$$

**II.C.2)** On reprend l'équation du mouvement d'une tranche de tube (fluide non compris) comprise entre  $y$  et  $y + dy$ , dans ( $R$ ) galiléen :

$$\delta m \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{T}_g + \vec{T}_d + \delta \vec{F}_{(F \rightarrow T)}$$

En projection sur  $\vec{Z}$ , on obtient donc :

Énoncé en fin de document.

$$\underbrace{\delta m}_{\mu} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = T_0 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy - \left[ \rho s \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + D_m \left( 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} + v \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \right] dy$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - K_1 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 K_2 D_m \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} = 0$$

Avec :

$$\begin{cases} K_1 = \frac{\mu + \rho s}{T_0 - v D_m} \\ K_2 = \frac{1}{T_0 - v D_m} \end{cases}$$

**II.3.C) a)** En injectant dans l'équation aux dérivées partielles précédentes une solution  $\underline{z}(y,t) = \underline{G}(y)e^{j\omega t}$ , on obtient :

$$\underline{G}''(y) + K_1 \omega^2 \underline{G}(y) - 2 K_2 D_m j \omega \underline{G}'(y) = 0$$

Soit, en ordonnant les termes :

$$\underline{G}''(y) - 2 K_2 D_m j \omega \underline{G}'(y) + K_1 \omega^2 \underline{G}(y) = 0$$

$$\Delta' = (K_2 D_m j \omega)^2 - K_1 \omega^2 = -(K_1 + K_2^2 D_m^2) \omega^2 < 0$$

Racines de l'équation caractéristique :

$$r = K_2 D_m j \omega \pm j \sqrt{-\Delta'}$$

Posons

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{1}{K_2 D_m \omega} \\ \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{-\Delta'}} = \frac{1}{\sqrt{K_1 + K_2^2 D_m^2} \omega} \end{cases}$$

Alors :

$$r = j \left( \frac{1}{\delta_1} \pm \frac{1}{\delta_2} \right)$$

et :

$$\underline{G}(y) = e^{j \frac{y}{\delta_1}} \left[ \underline{A} e^{j \frac{y}{\delta_2}} + \underline{B} e^{-j \frac{y}{\delta_2}} \right]$$

**Rem.** : \*  $[K_2] = \left[ \frac{1}{F} \right]$ , donc  $\left[ \frac{1}{K_2 D_m \omega} \right] = \left[ \frac{F}{m} \tau^2 \right] = [L]$ , ce qui assure que  $\delta_1$  est bien une longueur.

Enoncé en fin de document.

$$* \left[ \frac{K_2^2 D_m^2}{K_1} \right] = \left[ \frac{K_2 D_m^2}{\mu K_2} \right] = \left[ \frac{K_2 D_m^2}{\mu} \right] = \left[ K_2 \frac{m^2}{\tau^2} \times \frac{L}{m} \right] = \left[ K_2 m \frac{L}{\tau^2} \right] = \left[ \frac{mL}{F\tau^2} \right],$$

ce qui assure que  $K_1$  a la même dimension que  $K_2^2 D_m^2$ , et donc l'homogénéité de l'expression donnant  $\delta_2$ .

b) Conditions aux limites :

$$* \underline{G}(y=0) = 0 \Rightarrow \underline{B} = -\underline{A}, \text{ et :}$$

$$\underline{G}(y) = 2 j \underline{A} e^{j \frac{y}{\delta_1}} \sin\left(\frac{y}{\delta_2}\right)$$

$$* \underline{G}(y=L) = 0 \Rightarrow \frac{L}{\delta_2} = n\pi, \text{ donc :}$$

$$\underline{G}(y) = 2 j \underline{A} e^{j \frac{y}{\delta_1}} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

avec :

$$\sqrt{K_1 + K_2^2 D_m^2} w_n = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow$$

$$w_n = \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{K_1 + K_2^2 D_m^2}}$$

**Rem.** : Si  $\begin{cases} D_m = 0, K_1 = \frac{\mu}{T_0} = \frac{1}{C^2} \\ 1 = 0 \end{cases}$ , on retrouve les pulsations en l'absence d'écoulement.

**II.C.4) a)** Si  $D_m = 0$ ,  $\rho \neq 0$ , l'équation (3) redevient une équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - K_1 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

La propagation se fait alors à la célérité :  $C' = \frac{1}{\sqrt{K_1}} = \sqrt{\frac{T_0}{\mu'}}$ , si  $\mu' = \mu + \rho s$  est la masse linéique de l'ensemble tube + eau contenue.

b) Pour le fondamental :

$$w_1 = \frac{\pi}{L\sqrt{K_1}} = 2\pi f \Rightarrow \frac{1}{L^2 K_1} = 4f^2 = \frac{1}{L^2} \frac{T_0}{\mu'}$$

D'où :

$$T_0 = 4 f^2 L^2 \mu'$$

**A.N.** :  $T_0 = 195 \text{ N}$

c) Pour  $D_m = 0$  :  $\delta_1 \rightarrow \infty$ ,  $\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{K_1} w_1} = \frac{\pi}{L}$  d'après II.C.3)a) :

$$\underline{z}(y,t) = 2 j A \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{j w_1 t}$$



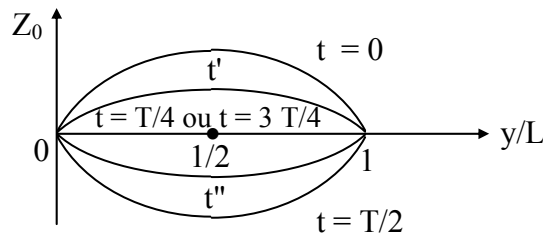
Enoncé en fin de document.

avec : 
$$\underline{z}\left(\frac{L}{2}, t\right) = Z_0 \cos w_1 t \Rightarrow 2 jA = Z_0$$

donc :

$$z(y, t) = Z_0 \sin\left(\frac{\Pi y}{L}\right) \cos(w_1 t)$$

d) 2 points symétriques par rapport à B vibrent en phase avec la même amplitude.



II.C.5) Pour  $D_m \neq 0$  et vibrations sur le mode fondamental :

$$\underline{z}(y) = 2 jA e^{j\frac{y}{\delta_1}} \sin\left(\frac{\Pi y}{L}\right) e^{jw_1 t}$$

avec

$$w_1 = \frac{\Pi}{L} \frac{1}{\sqrt{K_1 + K_2^2 D_m^2}} = 2 \Pi f$$

Par ailleurs :

$$\underline{z}\left(\frac{L}{2}, t\right) = Z_0 e^{jw_1 t} = 2 jA e^{j\frac{y}{2\delta_1}} e^{jw_1 t} \Rightarrow 2 jA = Z_0 e^{-j\frac{y}{2\delta_1}}$$

D'où :

$$\underline{z}(y, t) = Z_0 e^{\frac{j}{\delta_1}\left(y - \frac{L}{2}\right)} \sin\left(\frac{\Pi y}{L}\right) e^{jw_1 t}$$

Et en notations réelles :

$$z(y, t) = Z_0 \sin\left(\frac{\Pi y}{L}\right) \cos\left[w_1 t + \frac{1}{\delta_1}\left(y - \frac{L}{2}\right)\right]$$

Donc :

$$K = \frac{1}{\delta_1} = K_2 D_m w_1 = K_2 D_M (2 \Pi f)$$

II.C.6) a) Raisonnons avec  $D_m > 0$

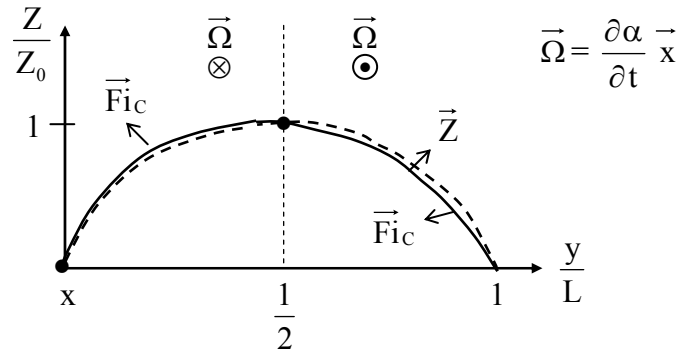
\* Pour  $y < \frac{L}{2}$  : le tube est en retard par rapport au mouvement qu'il avait lorsque  $D_m = 0$ .

\* Pour  $y > \frac{L}{2}$  : il est en avance.

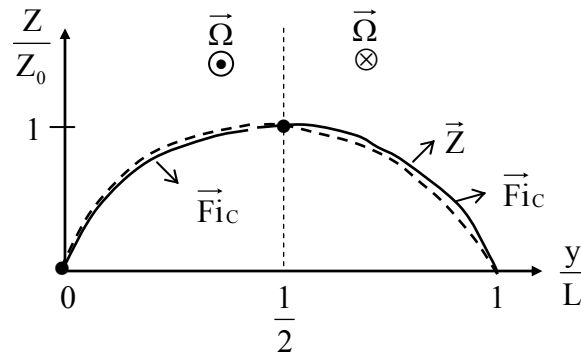
Énoncé en fin de document.

b) Pour  $KL \ll 2 \Pi$  :

\* Pour  $t \in ]0, \frac{T}{4}[$  (mouvement du tube « descendant ») :



\* Pour  $t \in ]\frac{3T}{4}, T[$  (mouvement du tube « montant ») :



c) Par rapport au cas  $D_m = 0$ , on tient compte de  $\vec{F}_{ic}$  de la question II.B.4), dirigée selon  $\vec{Z}$  (orthogonale au tube). Son sens dépend du signe de  $\Omega = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$  ( $\Omega < 0 \Rightarrow \vec{F}_{ic}$  selon  $+\vec{Z}$ ).

II.C.7) a) Pour les points A et C :

$$Z_1 = Z_0 \sin \frac{\Pi}{4} = \frac{Z_0}{\sqrt{2}} = 0,71 \text{ mm}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \varphi_C = K \left( \frac{3L}{4} - \frac{L}{2} \right) \\ \varphi_A = K \left( \frac{L}{4} - \frac{L}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \varphi = \varphi_C - \varphi_A = K \frac{L}{2} = \Pi K_2 D_m f L$$

$$\text{c) Avec } K_2 = \frac{1}{4 f^2 L^2 \mu'} : \quad \varphi = \frac{\Pi D_m}{4 f L \mu'} \text{ est proportionnel à } D_m$$

A.N. :  $\varphi = 0,258 D_m$

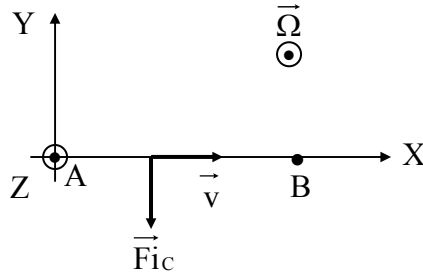
Énoncé en fin de document.

**II.D) Autre géométrie de débitmètre à effet Coriolis : le tube en U**

**II.D.1)** En l'absence d'écoulement, le plan (0xy) est plan de symétrie, donc :

$$y_B(t) = y_E(t), \forall t$$

**II.D.2)** \* Pour  $\Omega > 0$ , branche AC : la force de Coriolis a la direction et le sens de  $-2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ , donc dirigée selon  $-\vec{Y}$  :



\* Pour  $\Omega > 0$ , branche FD :  $\vec{v}$  est cette fois selon  $-\vec{X}$ , donc  $\vec{F}_{ic}$  selon  $+\vec{Y}$ .

Pour  $\Omega < 0$ , ces résultats sont inversés.

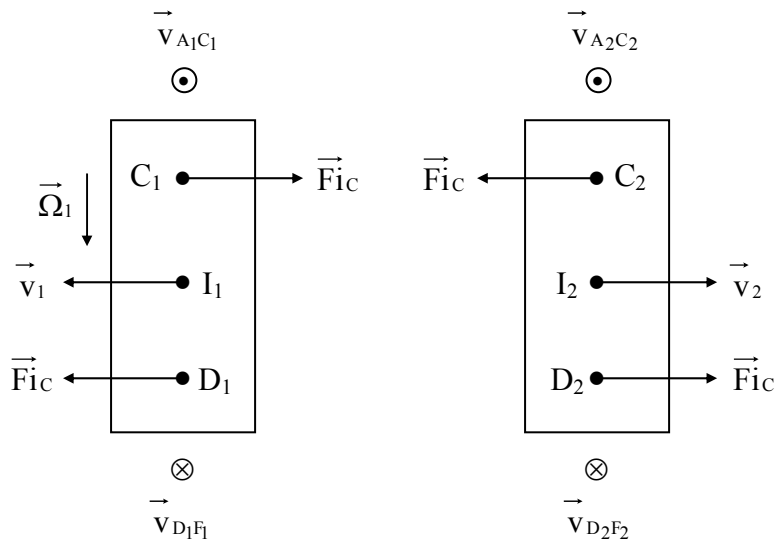
**II.D.3)** \* Sur la branche CD :  $\vec{\Omega} // \text{tube}$ , donc  $\vec{F}_{ic}$  y est nulle.

\* Sur les branches AC et DF, les forces de Coriolis sont opposées, donc la branche CD est soumise à un couple de forces oscillantes et oscille autour de l'axe 0X.

**II.D.4)** Les mouvements de B et E dans le référentiel ( $R'$ ) lié à I sont alors en opposition de phase.

**II.D.5)** \* Les mouvements des deux branches doivent être en opposition de phase pour que les capteurs (qui mesurent la séparation entre les 2 tubes) voient une amplitude maximale du mouvement.

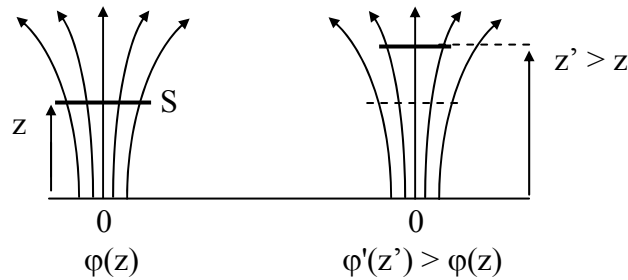
\* Schéma



**Partie III : Etude d'un capteur de vitesse**

**III.A) Principe de fonctionnement du capteur**

**III.A.1)** Comme  $\vec{B}$  est à flux conservatif,  $\phi$  ne dépend pas de la surface s'appuyant sur la bobine, on peut donc prendre la surface du disque (pour une spire). Ce flux  $\phi$  ( $\phi = N\varphi$ ) dépend donc de  $z$  et diminue avec  $z$ , compte tenu de l'incurvation et de la diminution de  $B$  lorsque  $z$  augmente.



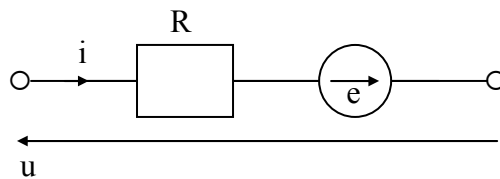
**III.A.2)** Les vibrations du tube font osciller la bobine, qui, parcouru par un flux  $\phi(t)$  non permanent, va être le siège d'une fem induite :

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

**III.A.3) a) ARQS :**  $I(M,t) = i(t)$  (négliger la propagation d'une onde de courant entre A et B)

Validité :  $AB \ll \lambda = c\tau$  ( $\tau$  temps caractéristique de variation de  $i(t)$ ).

**b)** Schéma électrique équivalent :  $u = Ri - e$



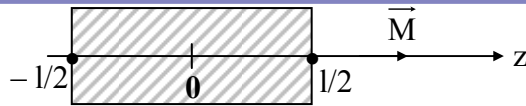
**III.A.4)** 
$$\left\{ \begin{array}{l} e = - \frac{d\phi}{dt} \text{ (loi de Faraday)} \\ \phi = N\varphi \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{u = + N \frac{d\varphi}{dt} + Ri \approx N \frac{d\varphi}{dt}}$$
 en négligeant la résistance de la bobine

**III.A.5)** 
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dt} = v \frac{d\varphi}{dz} \Rightarrow \boxed{u = N v \frac{d\varphi}{dz}}$$

Enoncé en fin de document.

III.B.1)



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{2} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \vec{z}$$

$$\text{En } z = \frac{1}{2} : \begin{cases} \theta_2 = \frac{\pi}{2} \\ \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{R^2 + 1^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu_0 M}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + 1^2}} = 0,33 \text{ T}$$

Il s'agit d'un champ très intense, bien supérieur aux champs obtenus à l'aide de bobines « usuelles », de l'ordre de  $10^{-4}$  T (solénoïde infini,  $i = 0,1$  A,  $n = 1000$  spires/n :  $B = \mu_0 n i = 4 \pi 10^{-5}$  T).

III.B.2) On a :

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{z+1/2}{\sqrt{R^2 + (z+1/2)^2}} \\ \cos\theta_2 = \frac{z-1/2}{\sqrt{R^2 + (z-1/2)^2}} \end{cases} \quad (\forall \text{ position de M !})$$

D'où :

$$B(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left[ \frac{z+1/2}{\sqrt{R^2 + (z+1/2)^2}} - \frac{z-1/2}{\sqrt{R^2 + (z-1/2)^2}} \right]$$

III.B.3) On a :  $B(z) = \frac{\mu_0 M}{2} f(z)$

Donc :  $\varphi \approx \pi R^2 B(z)$

et :  $u = N v \pi R^2 \frac{\mu_0 M}{2} f'(z)$

La réponse maximale du capteur correspond donc au maximum de  $|f'(z)|$  donc à

$$z = d = 5 \text{ mm} .$$

### III.C) Etude de la tension aux bornes de la bobine

III.C.1)  $\phi = N\varphi$

$$\varphi = \iint_{\text{spire}} B_z(r, z) dS = \int_{r=0}^R \left[ B(z) - \frac{r^2}{4} B''(z) \right] 2 \pi r dr = 2 \pi \left[ \frac{R^2}{2} B(z) - \frac{R^4}{16} B''(z) \right]$$

Énoncé en fin de document.

D'où :

$$\phi = N\pi R^2 \left[ B(z) - \frac{R^2}{8} B''(z) \right]$$

III.C.2) Avec

$$\begin{cases} B(z) = \frac{\mu_0 M}{2} f(z) \\ \frac{R^2}{8} B''(z) = \frac{R^2}{8} \frac{\mu_0 M}{2} f''(z) \end{cases}$$

Donc, avec  $R = 2 \text{ mm}$  :  $\frac{R^2}{8} = \frac{1}{2} \text{ mm}^2$ .

Ainsi :

$$\phi(z) = N\pi R^2 \frac{\mu_0 M}{2} \underbrace{\left[ f(z) - \frac{1}{2} f''(z) \right]}_{g(z)}$$

Au voisinage de  $z = d = 5 \text{ mm}$ ,  $g(z)$  est une droite de pente :  $g'(z) = 0,7 \text{ mm}^{-1}$ .

III.C.3) On a :  $u = v \frac{d\phi}{dz}$ , avec :

$$\frac{d\phi}{dz} = N\pi R^2 \frac{\mu_0 M}{2} g(z) = -310^{-4} \text{ Wbmm}^{-1}$$

III.C.4) Aux points A et C :  $V_1 = wZ_1 = 2 \pi f Z_1$ , avec  $Z_1 = 0,7 \text{ mm}$

Donc :

$$U_0 = V_1 \left| \frac{d\phi}{dz} \right| = 2 \pi f Z_1 \left| \frac{d\phi}{dz} \right|$$

A.N. :  $U_0 = 0,11 \text{ V}$

III.C.5) a) Approximations principales

\* Négliger la résistance  $R$  de la bobine, ce qui conduit à surévaluer le coefficient de proportionnalité entre  $u$  et  $v$  (en valeur absolue, soit  $\left| \frac{d\phi}{dz} \right|$ ).

\* Linéariser  $g(z)$  au voisinage de  $z = d$ , comme  $|g'(z)| < |g'(d)|$  pour  $z$  voisin de  $d$ , cette approximation conduit également à surévaluer ce coefficient.

b) C'est le déphasage entre A et C qui permet d'accéder au débit (question II.C.7) et non l'amplitude des mouvements, donc il n'est pas nécessaire de connaître ce coefficient avec exactitude.

Enoncé en fin de document.

### Partie IV : Filtrage du signal et mesure du déphasage

**IV.A.1)** \* Signaux de fréquence inférieure à  $f = 80$  Hz : rayonnement du réseau électrique à  $f' = 50$  Hz.

\* Signaux de fréquence supérieure à  $f$  : harmoniques du rayonnement précédent, harmoniques de vibrations du tube.

**IV.A.2)** \* Pour réduire l'amplitude de ces parasites : filtre passe-bande accordé sur la fréquence  $f$ .

\* Etablissons l'expression de  $\underline{H}(j\omega)$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \underline{V}^+ &= \frac{\underline{Y}_3 \underline{V}_p}{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4} \\ \bullet \underline{V}^- &= \frac{r}{r + (k-1)r} \underline{V}_s = \frac{\underline{V}_s}{k} \\ \bullet \underline{V}_p &= \frac{\underline{Y}_2 \underline{V}_e + \underline{Y}_3 \underline{V}^+ + \underline{Y}_1 \underline{V}_s}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \end{aligned} \right\} \underline{V}^+ = \underline{V}^- \Rightarrow \frac{\underline{Y}_3}{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4} \underline{V}_p = \frac{\underline{V}_s}{k}$$

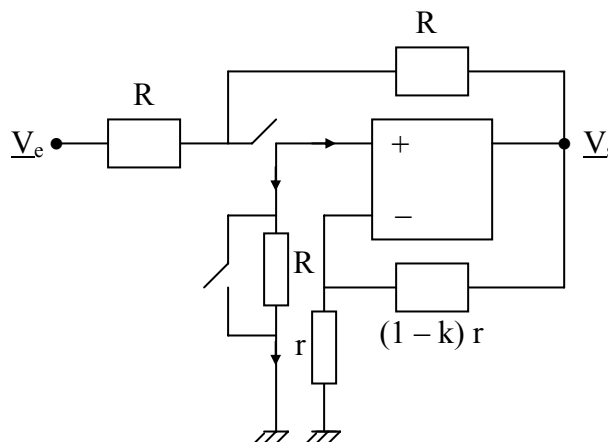
$$\text{D'où : } \frac{\underline{Y}_3}{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4} \left[ \frac{\underline{Y}_2 \underline{V}_e + \frac{\underline{Y}_3}{k} \underline{V}_s + \underline{Y}_1 \underline{V}_s}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \right] = \frac{\underline{V}_s}{k}$$

$$\Rightarrow \underline{V}_s [(\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4)(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) - \underline{Y}_3^2 - k\underline{Y}_1 \underline{Y}_3] = k\underline{Y}_2 \underline{Y}_3 \underline{V}_s$$

$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{k\underline{Y}_2 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_4 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) + \underline{Y}_3 (\underline{Y}_2 + (1-k) \underline{Y}_1)}$$

$$\text{IV.A.3) } \underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{1}{R} \quad \underline{Y}_3 = j\omega \quad \underline{Y}_4 = \frac{1}{R} + j\omega$$

\* Schéma « basse fréquence » ( $\omega \rightarrow \infty$ )



$$\text{Alors : } \underline{V}^+ = 0 = \underline{V}^- \Rightarrow \underline{V}_s = 0$$