Centrale PC I 2008

BIOPHYSIQUE DE LA BACTERIE ESCHERICHIA COLI

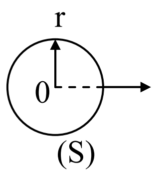
Partie I : Taille critique d'une bactérie aérobie

I.A) Densité particulaire en dioxygène au voisinage de la bactérie

I.A.1) Loi de Fick : $\boxed{\vec{j} = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\,n}$

j : nombre de particules par unité de surface et de temps ($m^{-2}s^{-1}$)

I.A.2)



$\vec{n}_{ext} = \vec{u}_r$

$\phi(r) = -\oiint_{(s)} \vec{j}.dS\,\vec{n}_{ext}$, flux entrant de particules à travers (S).

En régime stationnaire et en l'absence de sources, $\phi(r)$ ne dépend pas de r (div $\vec{j} = 0$).

D'où : $\boxed{\phi = -j(r)\,4\,\Pi r^2}$

I.A.3) On a : $\phi = \phi(r = R^+) = \phi(r \to \infty)$

Avec la loi de Fick : $\phi = D\dfrac{dn}{dr}\,4\,\Pi r^2 \Rightarrow dn = \dfrac{\phi}{4\,\Pi D}\dfrac{dr}{r^2}$

et par intégration de $r = R^+$ à $r \to \infty$:

$$\int_{n_1}^{n_\infty} dn = \int_R^\infty \frac{\phi}{4\,\Pi D}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow n_\infty - n_1 = \frac{\phi}{4\,\Pi DR}$$

Par ailleurs : $n_\infty = \mathcal{N}_A C_0$

D'où : $\boxed{n_1 = \mathcal{N}_A C_0 - \dfrac{\phi}{4\,\Pi DR}}$

I.B) Taille critique de la bactérie

I.B.1) Soit N(t) le nombre de molécules de dioxygène dissous dans la sphère de rayon R :

 François MORAND

$$\frac{dN}{dt} = -\underbrace{m\mathcal{N}_A\mathcal{A}}_{} + \phi$$

nombre de molécules de dioxygène
consommés par unité de temps (s^{-1})

En régime permanent : $\frac{dN}{dt} = 0$

D'où : $$\boxed{\phi = m\mathcal{N}_A\mathcal{A} = \mu\frac{4}{3}\Pi R^3\mathcal{N}_A\mathcal{A}}$$

I.B.2) On en déduit : $$\boxed{n_1 = \mathcal{N}_A C_0 - \frac{1}{3}\frac{\mu R^2\mathcal{N}_A\mathcal{A}}{D}}$$

Donc n_1 diminue si R augmente : lorsque la bactérie grossit, elle consomme plus de dioxygène, donc ϕ augmente ainsi que $\frac{dn}{dr}$.

I.B.3) Pour que la bactérie ne suffoque pas, il faut :

$$n_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R \leq R_C = \sqrt{\frac{3\,DC_0}{\mu\mathcal{A}}}}$$

On a $\frac{DC_0}{\mu\mathcal{A}}$ qui s'exprime en $\frac{m^2s^{-1}molm^{-3}}{kgm^{-3}molkg^{-1}s^{-1}}$, soit en m^2, ce qui assure l'homogénéité de l'expression ci-dessus.

A.N. : $\boxed{R_C = 8\ \mu m > R = 1\ \mu m}$, ce qui assure que la bactérie E. Coli ne suffoque pas.

I.B.4) Le nombre de molécules consommés par unité de temps par la bactérie est :

$$m\mathcal{N}_A\mathcal{A} = \phi$$

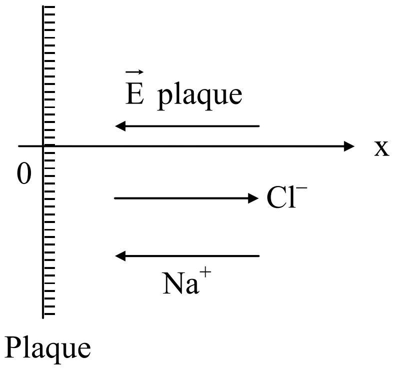
Soit : $$\boxed{\phi = \frac{4}{3}\Pi R_C{}^3\mu\mathcal{N}_A\mathcal{A}}$$

A.N. : $\phi = 2\ 10^{10}s^{-1}$

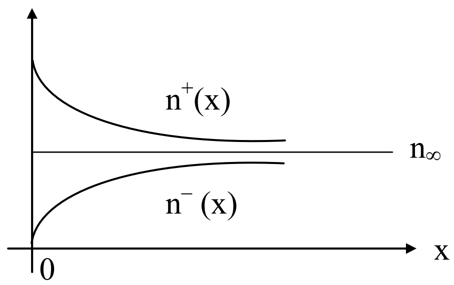
Partie II : Propriétés électrostatiques de la membrane de la bactérie

II.A) Etude préliminaire : longueur de Debye dans un électrolyte

II.A.1)



La plaque crée un champ uniforme $\vec{E} = -\dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{x}$ au sein de l'électrolyte ; ce champ déplace les cations Na^+ selon $-\vec{x}$, et les anions Cl^- selon $+\vec{x}$.



* Au voisinage de la plaque : $\rho(x) = (n^+(x) - n^-(x))\,e > 0$

* Loin de la plaque ($x >> \lambda$) : $\rho(x) \to 0$ (électroneutralité)

II.A.2)
$$\begin{cases} \vec{j}_D^{\,+} = -D^+ \dfrac{d(n^+e)}{dx}\,\vec{x} \\ \vec{j}_D^{\,-} = -D^- \dfrac{d(-n^-e)}{dx}\,\vec{x} \end{cases}$$
(loi de Fick)

II.A.3) Les vecteurs densité de courant de cations et d'anions sont donnés respectivement par :

$$\begin{cases} \vec{j}_e^{\,+} = n^+ e\,\vec{v}^{\,+} = n^+ e \mu^+ \vec{E} \\ \vec{j}_e^{\,-} = n^-(-e\,\vec{v}^{\,-}) = -n^- e \mu^- \vec{E} \end{cases}$$

II.A.4) Equations de Maxwell de l'électrostatique :

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \iff \ni \psi \text{ tq } \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\psi \end{cases}}$$

II.A.5) a) A l'équilibre : $\begin{cases} \vec{j}_D^{\,+} + \vec{j}_e^{\,+} = \vec{0} \\ \vec{j}_D^{\,-} + \vec{j}_e^{\,-} = \vec{0} \end{cases}$

Soit :

$$\begin{cases} -D^+ \dfrac{dn^+}{dx} + n^+\mu^+\left(-\dfrac{d\psi}{dx}\right) = 0 \\ D^- \dfrac{dn^-}{dx} - n^-\mu^-\left(-\dfrac{d\psi}{dx}\right) = 0 \end{cases}$$

Ou encore :

$$\boxed{\begin{cases} D^+ \dfrac{dn^+}{dx} = -\mu^+ \dfrac{d\psi}{dx} n^+ \\ D^- \dfrac{dn^-}{dx} = -\mu^- \dfrac{d\psi}{dx} n^- \end{cases}}$$

b) On peut intégrer les 2 relations ci-dessus :

$$\begin{cases} \dfrac{dn^+}{n^+} = -\dfrac{\mu^+}{D^+} d\psi \\ \dfrac{dn^-}{n^-} = -\dfrac{\mu^-}{D^-} d\psi \end{cases}$$

avec $\begin{cases} \psi(x \to \infty) = 0 \\ n(x \to \infty) = n_\infty \end{cases}$, on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} n^+(x) = n_\infty \exp\left(-\dfrac{\mu^+}{D^+}\psi(x)\right) \\ n^-(x) = n_\infty \exp\left(-\dfrac{\mu^-}{D^-}\psi(y)\right) \end{cases}}$$

c) Avec $\begin{cases} \dfrac{\mu^+}{D^+} = \dfrac{e}{k_B T} \\ \dfrac{\mu^-}{D^-} = -\dfrac{e}{k_B T} \end{cases}$

On retrouve une distribution d'ions obéissant à la loi <u>statistique de Maxwell Boltzmann</u> :

$$\begin{cases} n_+(x) = n_\infty \exp\left(-\dfrac{\xi^+(x)}{k_B T}\right), \ \xi^+ = +e\psi \\ n_-(x) = n_\infty \exp\left(-\dfrac{\xi^-(x)}{k_B T}\right), \ \xi^- = -e\psi \end{cases}$$

II.A.6) a) $\rho(x) = [n^+(x) - n^-(x)]\, e$

Soit : $$\rho(x) = -2\, n_\infty e \,\mathrm{sh}\left(\frac{e\psi(x)}{k_B T}\right)$$

Et : $$\boxed{\rho(x) \approx \frac{-2\, n_\infty e^2}{k_B T}\,\psi(x)} \quad \text{si } |e\psi(x)| << k_B T$$

b) $$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon} \\ \vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta\psi = -\frac{\rho}{\varepsilon}} \quad \text{(équation de Poisson)}$$

c) On en déduit : $$\boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2\, n_\infty e^2}{\varepsilon k_B T}\,\psi(x)}$$

En posant : $\boxed{\lambda^2 = \dfrac{\varepsilon k_B T}{2\, n_\infty e^2}}$, on obtient : $\boxed{\dfrac{d^2\psi}{dx^2} + \dfrac{1}{\lambda^2}\,\psi = 0}$

d) La solution est : $\psi(x) = \psi_1\, e^{-x/\lambda} + \psi_2\, e^{x/\lambda}$

$$\begin{cases} \psi \underset{x\to\infty}{\to} 0 : \psi_2 = 0 \\ -\left(\dfrac{d\psi}{dx}\right)_{x=0^+} = \dfrac{\sigma_{eff}}{\varepsilon}\, e^{-x/\lambda} = +\dfrac{1}{\lambda}\,\psi_1 \end{cases}$$

Ainsi : $$\boxed{\psi(x) = \frac{\lambda\sigma_{eff}}{\varepsilon}\, e^{-x/\lambda}}$$

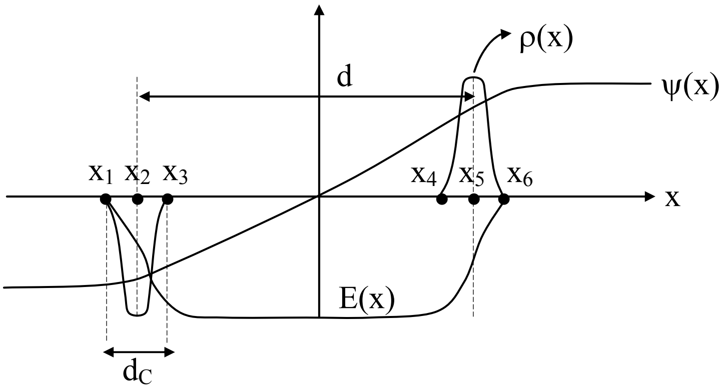
σ_{eff} est la charge surfacique des ions au voisinage de la plaque, où sont accumulés les cations Na^+ : $\underline{\sigma_{eff} > 0}$.

e) On a alors : $$\boxed{\rho(x) = -\varepsilon\,\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{\sigma_{eff}}{\lambda}\, e^{-x/\lambda}}$$

λ s'interprète donc comme une distance caractéristique d'écrantage des effets électrostatiques de la plaque sur l'électrolyte : pour $x >> \lambda$, $\rho(x) \approx 0$.

II.B) Répartition des charges de part et d'autre de la membrane de la bactérie

II.B.1) On obtient l'allure de $\psi(x)$ à partir de : $\boxed{E(x) = -\dfrac{d\psi}{dx}}$



II.B.2) On obtient ρ(x) par : $\rho(x) = \varepsilon \dfrac{dE}{dx}$ (ρ nulle si E = cste, $|\rho|$ maximale en x_2 et x_5, points d'inflexion de E(x)).

II.B.3) a) A l'extérieur comme à l'intérieur, le potentiel électrostatique ψ(x) se stabilise à une distance de la membrane de l'ordre de la longueur de Debye λ ; c'est dans cette région que des charges volumiques apparaissent :

$$\boxed{d_C \approx \lambda \approx \sqrt{\frac{\varepsilon k_B T}{2\, n_\infty e^2}}}$$

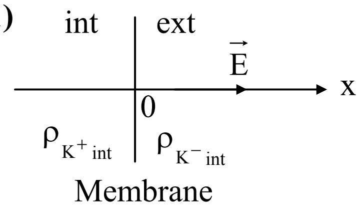
b) On a :
$$\underbrace{2\, n_\infty}_{(n^+ + n^-)_\infty} = \frac{\mathcal{N}_A C_{NaCl}}{(M_{Na} + M_{Cl})}\ \mathcal{N}_A \qquad C_{NaCl} = 5\ \text{gl}^{-1}$$

A.N. : $\boxed{d_C = 1{,}5\ \text{nm} = x_6 - x_4 = x_3 - x_1}$

Comme $d_C \ll d$, on peut considérer que ψ = cste au voisinage de la membrane : le potentiel de membrane est donc la différence de potentiel entre le milieu extérieur et le crytoplasme (cf. II.C)).

II.C) Potentiel de repos de la membrane

II.C.1)



Comme $\rho_{K^+\,int} > \rho_{K^+\,ext}$: $\boxed{\vec{E} = E(x)\,\vec{x},\ E(x) > 0}$

($\vec{E}$ orienté des zones les plus chargées vers les zones les moins chargées).

II.C.2) a) On intègre la relation fournie par l'énoncé :

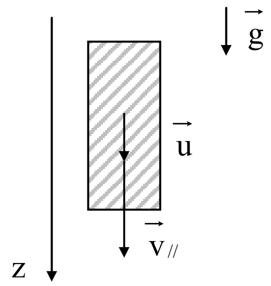
$$d\psi = -\frac{k_B T}{e}\frac{dn}{n} \Rightarrow \boxed{\Delta\psi = \psi_{int} - \psi_{ext} = \frac{k_B T}{e}\ln\left(\frac{n_{ext}}{n_{int}}\right)}$$

b) ***A.N.*** : $\boxed{d\psi = -\,0{,}12\ \text{V}}$ (bon ordre de grandeur d'un potentiel de membrane).

Partie III : Propulsion d'un micro-organisme par flagelle

III.A) Chute d'un bâtonnet dans un fluide visqueux

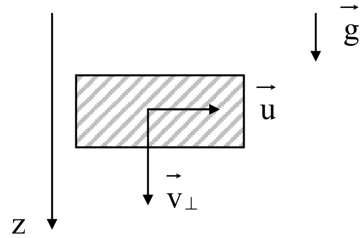
III.A.1) * Bâtonnet vertical :



$$m\frac{d\vec{v}_{//}}{dt} = \vec{P} - \eta\,\lambda_{//}\,\vec{v}_{//} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{v}_{//} = \frac{\vec{P}}{\eta\lambda_{//}}}$$

en régime permanent

* Bâtonnet horizontal :



$$m\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \vec{P} - \eta\,\lambda_{\perp}\,\vec{v}_{\perp}$$

Donc de même, en régime permanent : $\boxed{\vec{v}_{\perp} = \frac{\vec{P}}{\eta\lambda_{\perp}}}$

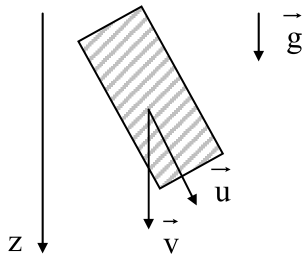
Comme $\vec{v}_{//} = 2\,\vec{v}_{\perp}$: $\boxed{\tau = \frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{//}} = 2}$

III.A.2) On sait que la force de viscosité dans un écoulement laminaire de champ de vitesses $\vec{v} = v(y)\,\vec{x}$ est donnée par :

$$\overrightarrow{dF} = \eta\,\frac{dv}{dy}\,dS\,\vec{x}$$

Donc : $[\lambda v] = \left[\frac{dv}{dy}S\right]$, soit : $\boxed{[\lambda] = [L] \text{ et } \alpha = 1}$

III.A.3) Cas général : $\begin{cases}\lambda_{//} = KL \\ \lambda_{\perp} = 2\,KL\end{cases}$



$$\vec{F} = -\,\eta\,[\lambda_{\perp}\vec{v}_{\perp} + \lambda_{//}\vec{v}_{//}] = -\,KL\eta\,[2\,\vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{//}]$$

avec : $\begin{cases}\vec{v}_{//} = (\vec{v}\cdot\vec{u})\,\vec{u} \\ \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{//}\end{cases}$

Ainsi : $\boxed{\vec{F} = -\,KL\eta\,[2\,\vec{v} - \vec{v}_{//}]}$

III.B) Propulsion d'une bactérie par flagelle ; aspect cinématique

III.B.1) **a)** Pour un tour complet de l'hélice, la bactérie se déplace du pas 2 Πh de l'hélice :
$\underline{d = 2\,\Pi h}$.

Ainsi : $$\boxed{v = \frac{d}{\tau} = \frac{\Omega d}{2\,\Pi} = \Omega h}$$

A.N. : $\boxed{v = 70\ \mu m s^{-1}}$

b) $Re = \dfrac{\mu a v}{\eta} \approx 10^{-5} << 1$

III.B.2) **a)** Le point M décrit un cercle de rayon a à la vitesse angulaire Ω :

$$\boxed{\vec{v} = a\Omega\,\vec{e}_\theta}$$

b) $$d\overrightarrow{OM}\ \underset{(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)}{\left|\begin{array}{l} dr = 0 \\ a d\theta \\ h d\theta \end{array}\right.} \quad ; \quad \vec{u} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}} \left|\begin{array}{l} 0 \\ a \\ h \end{array}\right.$$

Puis : $$\vec{v}\,.\,\vec{u} = \frac{av}{\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{a^2\Omega}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

Alors : $$\boxed{\vec{v}_{//} = (\vec{v}\,.\,\vec{u})\,\vec{u} = \frac{a^2\Omega}{a^2+h^2}\,[a\,\vec{e}_\theta + h\,\vec{e}_z]}$$

III.C) Existence d'une force propulsive

III.C.1) **a)** Avec $dL = \sqrt{a^2+h^2}\ d\theta$:

$$d\vec{F}_1 = -4\,\Pi\eta\sqrt{a^2+h^2}\left[2\,a\,\Omega\,\vec{e}_\theta - \frac{a^2\Omega}{a^2+h^2}\left(a\,\vec{e}_\theta + h\,\vec{e}_z\right)\right]d\theta$$

Soit : $$\boxed{d\vec{F}_1 = -4\,\Pi\eta\sqrt{a^2+h^2}\ a\Omega d\theta \underset{(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)}{\left|\begin{array}{l} 0 \\ 2 - \dfrac{a^2}{a^2+h^2} \\ -\dfrac{ah}{a^2+h^2} \end{array}\right.}}$$

b) L'intégration sur un nombre entier de tours donne une force résultante selon 0z ($\int_{-2\Pi p}^{0} \vec{e}_\theta \, d\theta = \vec{0}$).

Alors : $$\vec{F}_1 = -4\,\Pi\eta\sqrt{a^2+h^2}\;a\Omega\left(\frac{-ah}{a^2+h^2}\right)2\Pi p\,\vec{e}_z$$

Soit : $$\boxed{\vec{F}_1 = 4\,\Pi\eta\,\frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}\,L\Omega\,\vec{e}_z}$$

Donc, si $\Omega > 0$, la force exercée par le fluide sur le flagelle est propulsive selon 0z.

III.C.2) Par linéarité : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, soit :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{4\,\Pi\eta L}{\sqrt{a^2+h^2}}\left[ah\Omega - \left(\frac{h^2+2\,a^2}{a}\right)v\right]\vec{e}_z}$$

III.C.3) a) $$\frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{F}_2\|} = \frac{3\,aR\sqrt{a^2+h^2}}{2\,L(a^2+h^2)}$$

A.N. : $$\boxed{\frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{F}_2\|} = 0{,}04 \ll 1}$$

b) En négligeant la force de traînée sur la sphère, l'équation de son mouvement s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Pi}_A + \vec{P}$$

Comme $\mu_{bactérie} \approx \mu_{eau}$: $\vec{\Pi}_A + \vec{P} = \vec{0}$

En régime permanent : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$, donc $\vec{F} = \vec{0}$, ce qui donne :

$$\boxed{\vec{v}_P = \frac{a^2h}{2\,a^2+h^2}\,\Omega\,\vec{e}_z}$$

A.N. : $\underline{v_P = 31\,\mu m s^{-1}}$ (même ordre de grandeur que le résultat grossier Ωh de la question III.B.1)a), la force de traînée étant cependant moins efficace qu'un simple vissage pour faire avancer la bactérie.

III.D) Aspect énergétique

III.D.1) $d\vec{\mathcal{M}}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge (d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2)$

III.D.2) Démontrons le résultat donné par l'énoncé. Pour ce faire, on explicite $d\vec{F}_2$:

$$d\vec{F}_2 = -4\,\Pi\eta\left[2\,v_P\,\vec{e}_z - \frac{vh}{\sqrt{a^2+h^2}}\,\vec{u}\right]dL$$

Ainsi :

$$d\vec{\mathcal{M}}_0 \cdot \vec{e}_z = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & dF_{1\theta}+dF_{2\theta} & 0 \\ h\theta & dF_{1z}+dF_{2z} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a(dF_{1\theta}+dF_{2\theta})$$

avec :

$$\begin{cases} F_{1\theta} = -4\,\Pi\eta\,\sqrt{a^2+h^2}\,a\Omega\left(2-\dfrac{a^2h}{2a^2+h^2}\right)d\theta \\ F_{2\theta} = 4\,\Pi\eta v_P h\,\dfrac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\,d\theta = 4\,\Pi\eta\,\dfrac{h^2a^3\Omega d\theta}{\sqrt{a^2+h^2}\,(2a^2+h^2)} \end{cases}$$

Après simplifications, on obtient bien le résultat fourni par l'énoncé ($\mathcal{M}_z = 2\,\Pi P\, d\vec{\mathcal{M}}_0 \cdot \vec{e}_z$).

A.N. : $\underline{\mathcal{M}_z = -4{,}4 \times 10^{-18}\,\text{Nm}}$

III.D.3) $\boxed{\mathcal{P}_m = |\mathcal{M}_z|\,\Omega = 3{,}1 \times 10^{-15}\,\text{W}}$

Partie IV : Moteur rotatif biologique

IV.A) Source d'énergie du moteur

IV.A.1) Pour une transformation monobare monotherme :

$$\Delta G = \Delta U + p\Delta V - T\Delta S$$

Avec :

$$\begin{cases} \Delta U = (-p\Delta V + W') + Q \\ \Delta S \geq \dfrac{Q}{T} \end{cases}$$

W' : travail « reçu » autre que celui des forces de pressions

D'où : $\boxed{\Delta G \leq +W'}$ $\quad$ (ou $-\Delta G \geq -W' = W$)

Il y a égalité dans le cas d'une transformation <u>réversible</u>.

IV.A.2) Le passage des protons est réversible : $\delta W = -dG$