



CCP MP I 2008

MECANIQUE

I – Etude sommaire

1) Détermination des caractéristiques de l'oscillateur

1.a) Deuxième loi de Newton en référentiel galiléen et en projection sur Ox :

$$m \overset{\infty}{x} = -kx - \beta \overset{o}{x}$$

Soit :

$$\overset{\infty}{x} + 2\lambda \overset{o}{x} + w_0^2 x = 0$$

1.b) En régime pseudo périodique :

$$-\Delta' = \lambda^2 - w_0^2 < 0$$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$-\lambda \pm i \sqrt{w_0^2 - \lambda^2}$$

Alors : $x(t) = e^{-\lambda t} [\alpha \cos \Omega t + \beta \sin \Omega t]$, si

$$\Omega = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2} \quad (\text{pseudo-pulsation})$$

Avec :

$$\begin{cases} x(0) = x_0 = a & \alpha = x_0 \\ \overset{o}{x}(0) = 0 = -\lambda a + \beta \Omega & \beta = \frac{\lambda}{\Omega} x_0 \end{cases}$$

Et finalement :

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} \left[\cos \Omega t + \frac{\lambda}{\Omega} \sin \Omega t \right]$$

1.c) * Δt correspond à 9 oscillations :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{\Delta t}{q} \Rightarrow \Omega = 4,7 \text{ s}^{-1}$$

$$* \frac{x_1}{x_0} = e^{-\lambda \Delta t} \Rightarrow \lambda \Delta \tau = \ln \left(\frac{x_0}{x_1} \right)$$

A.N. : $\lambda = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$



$$* \beta = 2 \lambda m = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ kgs}^{-1}$$

$$* k = m (\Omega^2 + \lambda^2) = 2,2 \text{ Nm}^{-1}$$

2) Mesure d'une accélération

2.a) On applique la 2^e loi de Newton dans le référentiel non galiléen lié à l'extrémité E du ressort :

$$m \vec{a}' = -kx \vec{x} - \beta \dot{x} \vec{x} + \underbrace{\vec{F}_i}_0 = -m \vec{OE}$$

Ainsi :

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega^2 a \cos \omega t$$

2.b) En RSF : $(-\omega^2 + 2\lambda j\omega + \omega_0^2) \underline{x} = \omega^2 a e^{j\omega t}$

Soit : $\underline{x} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\lambda j\omega} a e^{j\omega t} = \underline{X} e^{j\omega t}$

Avec :
$$\begin{cases} X_0 = |\underline{X}| = a \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2 \omega^2}} \\ \tan \varphi = \frac{-2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (\varphi = \text{Arg}(\underline{X})) \end{cases}$$

Rem. : $\underline{H} = \frac{\underline{X}(\omega)}{a}$ est la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du 2^e ordre.

2.c) * La résonance est obtenue pour $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} > \frac{1}{\sqrt{2}}$, comme pour un filtre passe-bas du 2^e ordre.

A.N. : $Q \approx 1 > \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui assure l'existence d'une résonance.

* Pour $\omega = 7 \text{ s}^{-1}$: $u \approx 1,5 \Rightarrow y = 1,5$

Alors : $a = \frac{X_0}{y} = 13 \text{ cm}$

2.d) $P = \beta \dot{x}^2 \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{1}{2} \beta |\dot{x}|^2 = \frac{1}{2} \beta \omega^2 X_0^2$

A.N. : Pour $\omega = 7 \text{ s}^{-1}$: $\langle P \rangle = 4,7 \text{ mW}$



II – Amélioration du dispositif

1) On suppose que le mouvement a lieu sans glissement

1.a) La condition de RSG s'écrit :

$$\underbrace{\vec{v}(I \in \text{roue}/(R))}_{\vec{v}(G) + \overset{\circ}{\theta} \vec{y} \wedge \overline{GI}} = \vec{v}(I \in \text{sol}/(R)) = \vec{0}$$

Ainsi :

$$\overset{\circ}{x} = a \overset{\circ}{\theta}$$

1.b) $E_C = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J \overset{\circ}{\theta}^2$ (Koenig)

Soit :

$$E_C = \frac{3}{4} m \overset{\circ}{x}^2$$

1.c) Le RSG implique la conservation de l'énergie mécanique du système :

Or :

$$E_P = \frac{1}{2} kx^2 + \text{cste}$$

Ainsi :

$$\frac{3}{4} m \overset{\circ}{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{cste}$$

Soit :

$$\overset{\circ}{x}^2 + w^2 x^2 = \text{cste}$$

forme intégrale 1^{ère} de l'équation d'un oscillateur harmonique, avec :

$$w^2 = \frac{2k}{3m} = \frac{2}{3} w_0^2$$

1.d) Le RSG nécessite : $|T| < f_M$ (lois de Coulomb)

Si on applique le théorème du centre de masse à la roue, on obtient :

$$\begin{cases} N - mg = 0 \\ T - kx = m \overset{\circ}{x} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} N = mg \\ T - kx - m w^2 x = m(w_0^2 - w^2) x = \frac{1}{3} m w_0^2 x \end{cases}$$



Donc il y aura RSG si : $\frac{1}{3} m\omega_0^2 x_0 < fmg \quad \forall t$

Ce qui implique : $x_0 < \frac{3fg}{\omega_0^2} = x_1$

2) Cas où $x_0 > x_1$ phase de glissement

2.a) Dans le cas du glissement :

$$\left\{ \begin{array}{l} * \vec{T} \text{ colinéaire et de sens opposé à la vitesse de glissement } \vec{v}_g \\ * \|\vec{T}\| = fN \end{array} \right.$$

2.b) On a toujours : $\begin{cases} N = mg \\ T - kx = m \ddot{x} \end{cases}$ avec $T = +fN$ (1^{ère} phase de glissement)

Ainsi : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = fg$

La solution est : $x(t) = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t) + \frac{fg}{\omega_0^2}$

Avec : $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

on obtient : $x(t) = \left(x_0 - \frac{x_1}{3}\right) \cos(\omega_0 t) + \frac{x_1}{3}$

2.c) Pendant cette phase de glissement vers la gauche, le TMC barycentrique s'écrit :

$$J \ddot{\theta} = -a T = -afmg$$

Soit : $\ddot{\theta} = -\frac{2fg}{a} \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{2fg}{a} t$

2.d) La vitesse de glissement est : $v_g = \dot{x} - a \dot{\theta}$

On obtient : $v_g(t) = -\omega_0 \left(x_0 - \frac{x_1}{3}\right) \sin(\omega_0 t) + \frac{3}{2} \omega_0^2 x_1 t$



2.e) Pour $t \rightarrow 0$: $\sin(\omega_0 t) \sim \omega_0 t$, d'où :

$$v_g(t) \approx \omega_0^2 (x_1 - x_0) \quad (v_g < 0 \text{ car } x_0 > x_1)$$

2.f) Le glissement cesse dès que $v_g = 0$, soit à l'instant t_1 tel que :

$$\left(x_0 - \frac{x_1}{3}\right) \sin(\omega_0 t_1) = \frac{2}{3} (\omega_0 t_1) x_1$$

III – Accélération radiale d'un satellite

1.a) On sait que : $E_p = -\frac{K}{r_0}$ (si $\vec{F} = -\frac{K}{r_0^2} \vec{u}_r$)

$$E_m = -\frac{K}{2r_0} \quad (\text{état lié})$$

Donc : $E_c = E_m - E_p = -E_m$

Ainsi :

$$\frac{1}{2} m_s v_0^2 = \frac{K}{2r_0} = G m_s M_T \Rightarrow v_0 + \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}} = \sqrt{\frac{g R^2}{r_0}}$$

1.b) Pour un MCU : $T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0}$

Soit :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{g R^2}}$$

$$A.N. : \begin{cases} * r_0 = \left(\frac{g R^2 T_0^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 26700 \text{ km} \\ * v_0 = \frac{2\pi r_0}{T_0} = 3,88 \text{ km s}^{-1} \\ * \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1,45 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1} \end{cases}$$

2.a) On applique la 2e loi de Newton au point M dans le référentiel (R_S) non galiléen, en projection sur \vec{x} :

$$m x'' = -\frac{GmM_T}{(r_0 + x)^2} - \underbrace{m\omega_1^2 x}_{\text{rappel élastique}} + \underbrace{m\omega_0^2 (r_0 + x)}_{F_{i_c} \text{ centrifuge}}$$



Rem. : $\vec{F}_c \cdot \vec{x} = 0$ ($\vec{F}_c = -2 m \omega \vec{z} \wedge \dot{\vec{x}}$)

Soit :

$$\ddot{x} = - \frac{g R^2}{(r_0 + x)^2} - \omega_1^2 x + \omega_0^2 (r_0 + x)$$

2.b) Pour $x \ll r_0$:

$$\ddot{x} \approx - \underbrace{\frac{g R^2}{r_0^2}}_{\omega_0^2} \left(1 - \frac{2x}{r_0}\right) + (\omega_0^2 - \omega_1^2) x + \omega_0^2 r_0$$

Soit :

$$\ddot{x} + (\omega_1^2 - 3 \omega_0^2) x = 0$$

2.c) Numériquement : $\begin{cases} \omega_0 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} \\ \omega_1 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \end{cases}$

Donc $\omega_0 \ll \omega_1$, et on a un oscillateur harmonique de pulsation voisine de ω_1 .

2.d) Une accélération radiale perturbatrice modifiera la position d'équilibre relatif de l'oscillateur (nouvelle équation du mouvement : $\ddot{x} + (\omega_1^2 - 3 \omega_0^2) x = a_r$).

THERMODYNAMIQUE

1) Etude de différentes transformations subies par un gaz parfait

1.1.a) * Equation d'état du GP :

$$P_A^0 V_A^0 = \frac{m_0}{M_{O_2}} R T_A \Rightarrow m_0 = \frac{P_A^0 S d_A^0}{r_0 T_A^0}$$

A.N. : $m_0 = 2,56 \text{ g}$

* De même pour le compartiment 1 :

$$m_1 = \frac{P_A^1 S d_A^1}{r_1 T_A^1}$$

A.N. : $m_1 = 1,68 \text{ g}$

b) * Le piston Π_0 est bloqué : O_2 subit une transformation isochore : $d_B^0 = d_A^0 = 0,2 \text{ m}$.



* Contact thermique avec le thermostat : $T_B^0 = T_S = 600 \text{ K}$

* Isobare d'un GP : $\frac{P}{T} = \text{cste}$, donc : $P_B^0 = P_A^0 \frac{T_S}{T_A^0}$

A.N. : $P_B^0 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

c) * Le piston Π_1 est libre de se déplacer : $P_1 = P_{\text{atm}}$, $\forall t$ et N_2 subit donc une transformation monobare : $P_1^B = P_B^0 = 10^5 \text{ Pa}$

* $T_B^1 = T_S = 600 \text{ K}$

* Monobare d'un GP : $\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow d_B^1 = \frac{T_S}{T_A^1} d_A^1$

d) * $W_{AB}^0 = 0$ (isobare)

* $W_{AB}^1 = -P_{\text{atm}} (V_B^1 - V_A^1) = -P_{\text{atm}} S (d_B^1 - d_A^1)$ (monobare)

A.N. : $W_{AB}^1 = -150 \text{ J}$

e) * Transformation monobare : $Q_{AB} = \Delta H_{AB}$

* GP : $\Delta H_{AB} = m C_p (T_B - T_A)$ avec $C_p = \frac{r}{\gamma - 1}$

Ainsi : $Q_{AB}^1 = m_1 \frac{r}{\gamma - 1} (T_B^1 - T_A^1)$

A.N. : $Q_{AB}^1 = 525 \text{ J}$

f) 1ère identité thermodynamique :

$$dU = TdS - PdV_{\text{GP}} \quad m c_v dT$$

D'où : $dS = m c_v \frac{dT}{T} + m r \frac{dV}{V}$

D'où l'expression générale de ΔS_{AB} pour un GP (en fonction des variables T et V) :

$$\Delta S_{AB} = m r \left[\frac{1}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) + \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) \right]$$

Ici : $\Delta S_{AB}^0 = \frac{m_0 r_0}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_B^0}{T_A^0} \right)$



$$A.N. : \Delta S_{AB}^0 = 1,16 \text{ JK}^{-1}$$

g) 2^e identité thermodynamique : $dH = TdS + VdP$ GP $mc_p dT$

On obtient de même l'expression générale de ΔS_{AB} pour un GP (en fonction des variables T et P) :

$$\Delta S_{AB} = mr \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) - \ln \left(\frac{P_B}{P_A} \right) \right]$$

Ici :

$$\Delta S_{AB}^1 = m_1 r_1 \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_B^1}{T_A^1} \right)$$

$$A.N. : \Delta S_{AB}^1 = 1,21 \text{ JK}^{-1}$$

h) * Pour le système $\{O_2 + N_2\}$:
$$S_e = \frac{Q_{AB}^0 + Q_{AB}^1}{T_S}$$

* 2^e principe : $\Delta S_{AB}^{0+1} = S_e + \underbrace{S_{AB}^P}_{\geq 0}$

A.N. : $\underline{S_{AB}^P = 0,66 \text{ JK}^{-1} > 0}$ (irréversibilité)

1.2.a) * On a toujours :

$$T_C^0 = T_O^1 = T_S$$

* Piston Π_0 débloqué :

$$P_C^0 = P_C^1$$

b) * Ainsi :
$$\frac{m_0 r_0 T_C^0}{S d_C^0} = \frac{m_1 r_1 T_C^1}{S d_C^1}$$

$$\Rightarrow d_C^1 = \frac{m_1 r_1}{m_0 r_0} d_C^0$$

* Par ailleurs : $d_C^0 + d_C^1 = d_B^0 + d_B^1$ (piston Π_1 bloqué)

* On en déduit :

$$d_C^0 = \frac{d_B^0 + d_B^1}{1 + \frac{m_1 r_1}{m_0 r_0}}$$

$$A.N. : \left\{ \begin{array}{l} d_C^0 = 0,29 \text{ m} \end{array} \right.$$