CCP MP I 2008

MECANIQUE

I – Etude sommaire

1) Détermination des caractéristiques de l'oscillateur

1.a) Deuxième loi de Newton en référentiel galiléen et en projection sur Ox :

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

Soit : $$\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + w_0^2 x = 0}$$

1.b) En régime pseudo périodique :

$$-\Delta' = \lambda^2 - w_0^2 < 0$$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$-\lambda \pm i\sqrt{w_0^2 - \lambda^2}$$

Alors : $x(t) = e^{-\lambda t}[\alpha \cos \Omega t + \beta \sin \Omega t]$, si $\boxed{\Omega = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2}}$ (pseudo-pulsation)

Avec : $\begin{cases} x(0) = x_0 = a \\ \dot{x}(0) = 0 = -\lambda a + \beta\Omega \end{cases}$ $\qquad \alpha = x_0$, $\quad \beta = \dfrac{\lambda}{\Omega} x_0$

Et finalement : $$\boxed{x(t) = x_0\, e^{-\lambda t}\left[\cos \Omega t + \frac{\lambda}{\Omega}\sin \Omega t\right]}$$

1.c) * Δt correspond à 9 oscillations :

$$T = \frac{2\Pi}{\Omega} = \frac{\Delta t}{q} \Rightarrow \boxed{\Omega = 4{,}7\ s^{-1}}$$

* $$\frac{x_1}{x_0} = e^{-\lambda\Delta t} \Rightarrow \boxed{\lambda\Delta\tau = \ln\left(\frac{x_0}{x_1}\right)}$$

A.N. : $\underline{\lambda = 2{,}4\ 10^{-2}\ s^{-1}}$

* $\underline{\beta = 2\,\lambda m = 4{,}8\ 10^{-3} kgs^{-1}}$

* $\underline{k = m\,(\Omega^2 + \lambda^2) = 2{,}2\ Nm^{-1}}$

2) Mesure d'une accélération

2.a) On applique la 2[e] loi de Newton dans le référentiel non galiléen lié à l'extrémité E du ressort :

$$m\,\vec{a'} = -kx\,\vec{x} - \beta\,\dot{x}\,\vec{x} + \underbrace{\vec{Fi}_e}_{-m\,\ddot{\vec{OE}}}$$

Ainsi :

$$\boxed{\ddot{x} + 2\,\lambda\,\dot{x} + w_0^2 x = w^2\,a\cos wt}$$

2.b) En RSF : $(-w^2 + 2\,\lambda jw + w_0^2)\,\underline{x} = w^2\,a\,e^{jwt}$

Soit : $$\underline{x} = \frac{w^2}{w_0^2 - w^2 + 2\,\lambda jw}\,a\,e^{jwt} = \underline{X}\,e^{jwt}$$

Avec : $$\begin{cases} X_0 = |\underline{X}| = a\,\dfrac{w^2}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\,\lambda^2 w^2}} \\ \tan\varphi = \dfrac{-2\,\lambda w}{w_0^2 - w^2} \qquad (\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{X})) \end{cases}$$

Rem. : $\underline{H} = \dfrac{\underline{X}(w)}{a}$ est la fonction de transfert d'un <u>filtre passe-haut</u> du 2[e] ordre.

2.c) * La résonance est obtenue pour $Q = \dfrac{w_0}{2\,\lambda} > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, comme pour un filtre passe-bas du 2[e] ordre.

A.N. : $Q \approx 1 > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui assure l'existence d'une résonance.

* Pour $w = 7\ s^{-1}$: $u \approx 1{,}5 \Rightarrow y = 1{,}5$

Alors : $$a = \frac{X_0}{y} = 13\ cm$$

2.d) $P = \beta\,\dot{x}^2 \Rightarrow$ $$\boxed{<P> = \frac{1}{2}\,\beta\,|jw\underline{x}|^2 = \frac{1}{2}\,\beta\,w^2 X_0^2}$$

A.N. : Pour $w = 7\ s^{-1}$: $\underline{<P> = 4{,}7\ mW}$

II – Amélioration du dispositif

1) On suppose que le mouvement a lieu sans glissement

1.a) La condition de RSG s'écrit :

$$\underbrace{\vec{v}\,(I \in \text{roue}/(R))}_{\vec{v}\,(G)\,+\,\dot{\theta}\,\vec{y}\,\wedge\,\overrightarrow{GI}} = \vec{v}\ (I \in \text{sol}/(R)) = \vec{0}$$

Ainsi : $\boxed{\dot{x} = a\,\dot{\theta}}$

1.b) $E_C = \frac{1}{2}\, m\, v_G^2 + \frac{1}{2}\, J\,\dot{\theta}^2$ (Koenig)

Soit : $\boxed{E_C = \frac{3}{4}\, m\,\dot{x}^2}$

1.c) Le RSG implique la conservation de l'énergie mécanique du système :

Or : $E_P = \frac{1}{2}\, kx^2 + \text{cste}$

Ainsi : $\frac{3}{4}\, m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, kx^2 = \text{cste}$

Soit : $\boxed{\dot{x}^2 + w^2\, x^2 = \text{cste}}$

forme intégrale 1ère de l'équation d'un oscillateur harmonique, avec :

$$\boxed{w^2 = \frac{2\,k}{3\,m} = \frac{2}{3}\, w_0^2}$$

1.d) Le RSG nécessite : $|T| < f_M$ (lois de Coulomb)

Si on applique le théorème du centre de masse à la roue, on obtient :

$$\begin{cases} N - mg = 0 \\ T - kx = m\,\ddot{x} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} N = mg \\ T\ kx - mw^2x = m(w_0^2 - w^2)\,x = \frac{1}{3}\, mw_0^2x \end{cases}$$

Donc il y aura RSG si : $\frac{1}{3}\ m w_0^2 x\ |x| < fmg \quad \forall t$

Ce qui implique : $\boxed{x_0 < \frac{3\ fg}{w_0^{\ 2}} = x_1}$

2) Cas où $x_0 > x_1$ phase de glissement

2.a) Dans le cas du glissement :

$$\begin{cases} * \ \vec{T} \text{ colinéaire et de sens opposé à la vitesse de glissement } \vec{v}_g \\ * \ \|\vec{T}\| = f\,N \end{cases}$$

2.b) On a toujours : $\begin{cases} N = mg \\ T - kx = m\ddot{x} \end{cases}$ avec $T = + f\,N$ ($1^{\text{ère}}$ phase de glissement)

Ainsi : $\boxed{\ddot{x} + w_0^2\, x = fg}$

La solution est : $x(t) = \alpha \cos(w_0 t) + \beta \sin(w_0 t) + \frac{fg}{w_0^{\ 2}}$

Avec : $\begin{cases} x(o) = x_0 \\ \dot{x}(o) = 0 \end{cases}$

on obtient : $\boxed{x(t) = (x_0 - \frac{x_1}{3}) \cos(w_0 t) + \frac{x_1}{3}}$

2.c) Pendant cette phase de glissement vers la gauche, le TMC barycentrique s'écrit :

$$J\ddot{\theta} = -\,a\,T = -\,afmg$$

Soit : $\ddot{\theta} = -\frac{2\ fg}{a} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = -\frac{2\ fg}{a}\ t}$

2.d) La vitesse de glissement est : $v_g = \dot{x} - a\,\dot{\theta}$

On obtient : $\boxed{v_g(t) = -\,w_0\,(x_0 - \frac{x_1}{3}) \sin(w_0 t) + \frac{3}{2}\ w_0^2 x_1\ t}$

2.e) Pour $t \to 0$: $\sin(w_0 t) \sim w_0 t$, d'où :

$$\boxed{v_g(t) \approx w_0^2 (x_1 - x_0)} \qquad (v_g < 0 \text{ car } x_0 > x_1)$$

2.f) Le glissement cesse dès que $v_g = 0$, soit à l'instant t_1 tel que :

$$\boxed{(x_0 - \frac{x_1}{3}) \sin(w_0 t_1) = \frac{2}{3} (w_0 t_1)\, x_1}$$

III – Accélération radiale d'un satellite

1.a) On sait que : $E_p = -\dfrac{K}{r_0}$ $\quad$ (si $\vec{F} = -\dfrac{K}{r_0^{\,2}}\,\vec{u}_r$)

$E_m = -\dfrac{K}{2\, r_0}$ $\quad$ (état lié)

Donc : $E_c = E_m - E_p = -E_m$

Ainsi : $\dfrac{1}{2}\, m_S v_0^{\,2} = \dfrac{K}{2\, r_0} = G m_S M_T \Rightarrow \boxed{v_0 + \sqrt{\dfrac{GM_T}{r_0}} = \sqrt{\dfrac{g R^2}{r_0}}}$

1.b) Pour un MCU : $T_0 = \dfrac{2\,\Pi\, r_0}{v_0}$

Soit : $\boxed{T_0 = 2\,\Pi \sqrt{\dfrac{r_0^{\,3}}{g R^2}}}$

A.N. :

$$\begin{cases} * \ r_0 = \left(\dfrac{g R^2 T_0^{\,2}}{4\,\Pi^2}\right)^{1/3} = 26700 \text{ km} \\ * \ v_0 = \dfrac{2\,\Pi\, r_0}{T_0} = 3{,}88 \text{ kms}^{-1} \\ * \ w_0 = \dfrac{2\,\Pi}{T_0} = 1{,}45 \times 10^{-4} \text{s}^{-1} \end{cases}$$

2.a) On applique la 2e loi de Newton au point M dans le référentiel (R_S) non galiléen, en projection sur $\vec{x}$:

$$m\ddot{x} = -\frac{G m M_T}{(r_0 + x)^2} - \underbrace{m w_1^{\,2} x}_{\text{rappel élastique}} + \underbrace{m w_0^{\,2}(r_0 + x)}_{Fi_e \text{ centrifuge}}$$

Rem. : $\overrightarrow{Fi_c} \cdot \vec{x} = 0 \quad (\overrightarrow{Fi_c} = -2\,m\,w\,\vec{z} \wedge \dot{x}\,\vec{x})$

Soit :
$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{g\,R^2}{(r_0 + x)^2} - w_1^2 x + w_0^2\,(r_0 + x)}$$

2.b) Pour $x \ll r_0$:
$$\ddot{x} \approx -\underbrace{\frac{g\,R^2}{r_0^2}}_{w_0^2}\left(1 - \frac{2\,x}{r_0}\right) + (w_0^2 - w_1^2)\,x + w_0^2\,r_0$$

Soit :
$$\boxed{\ddot{x} + (w_1^2 - 3\,w_0^2)\,x = 0}$$

2.c) Numériquement : $\begin{cases} w_0 = 1{,}5\ 10^{-4} s^{-1} \\ w_1 = 3\ 10^{-2} s^{-1} \end{cases}$

Donc $w_0 \ll w_1$, et on a un oscillateur harmonique de pulsation voisine de w_1.

2.d) Une accélération radiale perturbatrice modifiera la position d'équilibre relatif de l'oscillateur (nouvelle équation du mouvement : $\ddot{x} + (w_1^2 - 3\,w_0^2)\,x = a_r$).

THERMODYNAMIQUE

1) Etude de différentes transformations subies par un gaz parfait

1.1.a) * Equation d'état du GP :

$$P_A{}^0 V_A{}^0 = \frac{m_0}{M_{O_2}}\,RT_A \;\Rightarrow\; \boxed{m_0 = \frac{P_A{}^0 S d_A{}^0}{r_0 T_A{}^0}}$$

A.N. : $\boxed{m_0 = 2{,}56\ g}$

* De même pour le compartiment 1 :

$$\boxed{m_1 = \frac{P_A{}^1 S d_A{}^1}{r_1 T_A{}^1}}$$

A.N. : $\boxed{m_1 = 1{,}68\ g}$

b) * Le piston Π_0 est bloqué : O_2 subit une transformation <u>isochore</u> : $\underline{d_B{}^0 = d_A{}^0 = 0{,}2\ m}$.

* Contact thermique avec le thermostat : $\boxed{T_B{}^0 = T_S = 600 \text{ K}}$

* Isobare d'un GP : $\dfrac{P}{T}$ = cste, donc : $\boxed{P_B{}^0 = P_A{}^0 \dfrac{T_S}{T_A{}^0}}$

A.N. : $\boxed{P_B{}^0 = 2\ 10^5 \text{ Pa}}$

c) * Le piston Π_1 est libre de se déplacer : $P_1 = P_{atm}$, $\forall t$ et N_2 subit donc une transformation monobare : $\boxed{P_1{}^B = P_B{}^0 = 10^5 \text{ Pa}}$

* $\boxed{T_B{}^1 = T_S = 600 \text{ K}}$

* Monobare d'un GP : $\dfrac{V_A}{T_A} = \dfrac{V_B}{T_B} \Rightarrow \boxed{d_B{}^1 = \dfrac{T_S}{T_A{}^1} d_A{}^1}$

d) * $W_{AB}{}^0 = 0$ (isobare)

* $W_{AB}{}^1 = -P_{atm}(V_B{}^1 - V_A{}^1) = -P_{atm}S(d_B{}^1 - d_A{}^1)$ (monobare)

A.N. : $\boxed{W_{AB}{}^1 = -150 \text{ J}}$

e) * Transformation monobare : $Q_{AB} = \Delta H_{AB}$

* GP : $\Delta H_{AB} = mC_P(T_B - T_A)$ avec $C_P = \dfrac{r}{\gamma - 1}$

Ainsi : $\boxed{Q_{AB}{}^1 = m_1 \dfrac{r}{\gamma-1}(T_B{}^1 - T_A{}^1)}$

A.N. : $\boxed{Q_{AB}{}^1 = 525 \text{ J}}$

f) 1ère identité thermodynamique :

$$dU = TdS - PdV \underset{GP}{=} m\, c_v\, dT$$

D'où : $$dS = mc_v \frac{dT}{T} + mr \frac{dV}{V}$$

D'où l'expression générale de ΔS_{AB} pour un GP (en fonction des variables T et V) :

$$\Delta S_{AB} = mr\left[\frac{1}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)\right]$$

Ici : $$\boxed{\Delta S_{AB}{}^0 = \frac{m_0 r_0}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T_B{}^0}{T_A{}^0}\right)}$$

A.N. : $\boxed{\Delta S_{AB}{}^{0} = 1{,}16\ \text{JK}^{-1}}$

g) 2^e^ identité thermodynamique : $dH = TdS + VdP\ \underline{GP}\ mc_p dT$

On obtient de même l'expression générale de ΔS_{AB} pour un GP (en fonction des variables T et P) :

$$\Delta S_{AB} = mr\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) - \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)\right]$$

Ici :
$$\boxed{\Delta S_{AB}{}^{1} = m_1 r_1 \frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_B{}^{1}}{T_A{}^{1}}\right)}$$

A.N. : $\boxed{\Delta S_{AB}{}^{1} = 1{,}21\ \text{J K}^{-1}}$

h) * Pour le système $\{O_2 + N_2\}$: $\boxed{S_e = \dfrac{Q_{AB}{}^{0} + Q_{AB}{}^{1}}{T_S}}$

* 2^e^ principe : $\Delta S_{AB}{}^{0+1} = S_e + \underbrace{S_{AB}{}^{P}}_{\geq 0}$

A.N. : $\underline{S_{AB}{}^{P} = 0{,}66\ \text{JK}^{-1} > 0}$ (irréversibilité)

1.2.a) * On a toujours : $\boxed{T_C{}^{0} = T_O{}^{1} = T_S}$

* Piston Π_0 débloqué : $\boxed{P_C{}^{0} = P_C{}^{1}}$

b) * Ainsi : $\dfrac{m_0 r_0 T_C{}^{0}}{Sd_C{}^{0}} = \dfrac{m_1 r_1 T_C{}^{1}}{Sd_C{}^{1}}$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{d_C{}^{1} = \frac{m_1 r_1}{m_0 r_0}\, d_C{}^{0}}$$

* Par ailleurs : $d_C{}^{0} + d_C{}^{1} = d_B{}^{0} + d_B{}^{1}$ (piston Π_1 bloqué)

* On en déduit : $\boxed{d_C{}^{0} = \dfrac{d_B{}^{0} + d_B{}^{1}}{1 + \dfrac{m_1 r_1}{m_0 r_0}}}$

A.N. : $\boxed{\left\{ d_C{}^{0} = 0{,}29\ \text{m} \right.}$