PROBABILITES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–31

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \leq 0,\ f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x > 0,\ f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}(-1+\ln x)^2}.$$

1) a) Montrer que, $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}(1+\ln^2(x))}$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer les variations de f et tracer sa représentation graphique.

4) a) Montrer que f est une densité de probabilité (on pourra penser à utiliser la loi normale $\mathcal{N}(1,1)$) .

Dans la suite de l'exercice, nous noterons X une variable qui admet f pour densité.

b) Déterminer la fonction F de répartition de X en fonction de celle, notée Φ, de la loi normale centrée réduite.

5) Calculer l'espérance $E(X)$ de X (on pourra, dans l'intégrale, poser $u = \ln x - 2$) .

 Jean MALLET, Michel MITERNIQUE et France MALLET-ZOUTU © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 31

CORRIGE–31 :

QUESTION–1

a)

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ (-1+\ln x)^2 &= \ln^2 x - 2\ln x + 1.\\ \exp(-\tfrac{1}{2}(-1+\ln x)^2) &= \exp(\ln x - \tfrac{1}{2}(1+\ln^2 x))\\ &= \exp(\ln x)\times\exp(-\tfrac{1}{2}(1+\ln^2 x))\\ &= x\exp(-\tfrac{1}{2}(1+\ln^2 x)).\end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = \frac{x\exp(-\frac{1}{2}(1+\ln^2 x))}{x\sqrt{2\pi}}$$

$$\boxed{\forall x>0,\ f(x)=\frac{\exp(-\frac{1}{2}(1+\ln^2 x))}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times e^{-\frac{1}{2}(1+\ln^2 x)}.}$$

b)

$$\lim_{0^+}\Big(-\frac{1}{2}\Big(1+\ln^2 x\Big)\Big) = -\infty \Longrightarrow \lim_{0^+}\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(1+\ln^2 x\Big)\Big) = 0.$$

$$\boxed{\lim_{0^-} f(x) = \lim_{0^+} f(x) = f(0) \text{ veut dire } f \text{ est continue en } 0.}$$

Or f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ puisque f est nulle sur cet intervalle.

$x \longmapsto -\frac{1}{2}\Big(1+\ln^2 x\Big)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; exp est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la composée $x \longmapsto \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(1+\ln^2 x\Big)\Big)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

QUESTION–2

- La même démarche que pour la continuité prouve que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
- **Dérivabilité en** 0**.**

$\forall x\le 0,\ f(x)=0 \Longrightarrow f'_g(0)=0.$

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{1}{2}(1+\ln^2 x)}}{x}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(1+\ln^2 x)-\ln x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(1+\ln x)^2}.\end{aligned}$$

$$\lim_{0^+} -\frac{1}{2}(1+\ln x)^2 = -\infty \Longrightarrow \lim_{0^+} e^{-\frac{1}{2}(1+\ln x)^2} = 0.$$

Conclusion du calcul précédent : f est dérivable en 0 à droite et $f'_d(0)=0$.

Donc f est dérivable en 0 car $f'_g(0)=f'_d(0)=0$ et $f'(0)=0$. Compte tenu du premier point de la question,

$$f \textbf{ est dérivable sur } \mathbb{R}.$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.