PROBABILITES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE−31

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \leq 0,\ f(x) = 0 \quad \text{et} \ \forall x > 0,\ f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}(-1+\ln x)^2}.$$

1) a) Montrer que, $\forall x > 0,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}(1+\ln^2(x))}$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer les variations de f et tracer sa représentation graphique.

4) a) Montrer que f est une densité de probabilité (on pourra penser à utiliser la loi normale $\mathcal{N}(1,1)$) .

Dans la suite de l'exercice, nous noterons X une variable qui admet f pour densité.

b) Déterminer la fonction F de répartition de X en fonction de celle, notée Φ, de la loi normale centrée réduite.

5) Calculer l'espérance $E(X)$ de X (on pourra, dans l'intégrale, poser $u = \ln x - 2$) .

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 31

CORRIGE–31 :

QUESTION–1

a)

$$\begin{aligned}
\forall x > 0,\ (-1+\ln x)^2 &= \ln^2 x - 2\ln x + 1.\\
\exp(-\tfrac{1}{2}(-1+\ln x)^2) &= \exp(\ln x - \tfrac{1}{2}(1+\ln^2 x))\\
&= \exp(\ln x) \times \exp(-\tfrac{1}{2}(1+\ln^2 x))\\
&= x\exp(-\tfrac{1}{2}(1+\ln^2 x)).
\end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = \frac{x\exp(-\frac{1}{2}(1+\ln^2 x))}{x\sqrt{2\pi}}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ f(x) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}(1+\ln^2 x))}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}(1+\ln^2 x)}.}$$

b)

$$\lim_{0^+}\left(-\frac{1}{2}\left(1+\ln^2 x\right)\right) = -\infty \Longrightarrow \lim_{0^+}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(1+\ln^2 x\right)\right) = 0.$$

$$\boxed{\lim_{0^-} f(x) = \lim_{0^+} f(x) = f(0) \text{ veut dire } f \text{ est continue en } 0.}$$

Or f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ puisque f est nulle sur cet intervalle.

$x \longmapsto -\frac{1}{2}\left(1+\ln^2 x\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; exp est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la composée $x \longmapsto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(1+\ln^2 x\right)\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

QUESTION–2

- La même démarche que pour la continuité prouve que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
- **Dérivabilité en** 0.

$\forall x \leq 0,\ f(x) = 0 \Longrightarrow f'_g(0) = 0.$

$$\begin{aligned}
\forall x > 0,\ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{1}{2}(1+\ln^2 x)}}{x}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(1+\ln^2 x)-\ln x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(1+\ln x)^2}.
\end{aligned}$$

$$\lim_{0^+} -\frac{1}{2}(1+\ln x)^2 = -\infty \Longrightarrow \lim_{0^+} e^{-\frac{1}{2}(1+\ln x)^2} = 0.$$

> Conclusion du calcul précédent : f est dérivable en 0 à droite et $f'_d(0) = 0$.
>
> Donc f est dérivable en 0 car $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. Compte tenu du premier point de la question,
>
> f **est dérivable sur** $\mathbb{R}$.