# PROBABILITES

## ENONCE DE L'EXERCICE

**ENONCE−30**

Soit $p$ et $q$ deux entiers naturels. On pose : $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

**1) a)** Calculer $B(p,0)$. Montrer que $B(p,q) = B(q,p)$.

**b)** Pour $q \geq 1$, trouver une relation entre $B(p,q)$ et $B(p+1,q-1)$.

**c)** En déduire la valeur de $B(p,q)$.

**2)** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. $n$ automobilistes (que l'on numérote $1,\ldots,n$) vont faire le plein dans la seule station d'essence d'un petit village de Bourgogne entre midi (origine des temps) et une heure, de manière indépendante les uns des autres. On note $H_k$ l'heure d'arrivée du conducteur numéro $k$ ; on suppose que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $H_k$ suit une loi uniforme sur $[0;1]$ et que les variables $H_k$ sont mutuellement indépendantes.

On note, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $Y_i$ l'heure d'arrivée du $i$ ème automobiliste (qui n'a aucune raison d'être l'automobiliste numéro $i$).

**a)** Soit $t \in [0;1]$. Quelle est la probabilité pour que l'automobiliste numéro $k$ arrive au plus tard à l'instant $t$ ?

En déduire la loi de la variable aléatoire $N_t$ égale au nombre d'automobilistes arrivés à la station d'essence au plus tard à l'instant $t$.

**b)** Montrer que

$$\forall t \in [0;1],\ p(Y_i \leq t) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k}.$$

Les variables $Y_i$ sont-elles indépendantes ?

**3) a)** Montrer que $Y_i$ est une variable à densité ; on notera $f_i$ une densité de $Y_i$.

**b)** Montrer que

$$\forall t \in ]0;1[,\ f_i(t) = n\binom{n-1}{i-1} t^{i-1}(1-t)^{n-i}.$$

On rappelle que, pour $k \ / \ 1 \leq k \leq n-1$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \text{ et } (n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}.$$

**c)** Calculer l'espérance de $Y_i$.

 **Jean MALLET, Michel MITERNIQUE et France MALLET-ZOUTU** 

## CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 30

## CORRIGE–30 :

**QUESTION–1**

**a)** $B(p,0) = \displaystyle\int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1}$.

Dans l'expression de $B(p,q)$, posons $u(t) = 1 - t$ ; on a $du = u'(t)dt = -dt$. **Le changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ sur** $[0;1]$**.**

$$B(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt = -\int_1^0 (1-u)^p u^q du = \int_0^1 u^q(1-u)^p du.$$

$$\boxed{B(p,q) = B(q,p).}$$

**b)**

Intégrons par parties :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = (1-t)^q & ; & u'(t) = -q(1-t)^{q-1} \\ v'(t) = t^p & ; & v(t) = \dfrac{t^{p+1}}{p+1}. \end{array}$$

$u$ **et** $v$ **sont de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $[0;1]$**, pour** $q \geq 1$.

$$B(p,q) = \left[\frac{(1-t)^q t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}dt$$

Le crochet est nul en 0 et en 1, donc

$$\boxed{\forall p \geq 0,\ q \geq 1,\ B(p,q) = \frac{q}{p+1}B(p+1,q-1).}$$

**c)**

Ecrivons cette relation pour $q, q-1, \ldots, 2, 1$.

$$\begin{array}{rcl} B(p,q) & = & \dfrac{q}{p+1}B(p+1,q-1) \\ B(p+1,q-1) & = & \dfrac{q-1}{p+2}B(p+2,q-2) \\ & & \textbf{(la somme des termes du couple vaut toujours } p+q\textbf{)} \\ \vdots & & \vdots \\ B(p+q-2,2) & = & \dfrac{2}{p+q-1}B(p+q-1,1) \\ B(p+q-1,1) & = & \dfrac{1}{p+q}B(p+q,0) \\ B(p+q,0) & = & \dfrac{1}{p+q+1} \quad \textbf{(d'après la question 1).} \end{array}$$

Les fonctions $t \longmapsto t^p(1-t)^q$ sont continues, positives sur $[0;1]$, donc les **intégrales sont positives ou nulles (bornes dans l'ordre croissant).**

C'est ce que l'on appelle parfois la positivité de l'intégrale.

**Dans ces conditions**, les intégrales ne peuvent être nulles que si les fonctions que l'on intègre sont nulles sur $[0;1]$, ce qui n'est évidemment pas le cas. Les intégrales sont donc strictement positives, et par suite non nulles.

- **Revenons aux égalités.**

On fait le produit termes à termes des égalités et on simplifie par le facteur commun **non nul** $B(p+1,q-1)B(p+2,q-2)\ldots B(p+q-1,1)B(p+q,0)$.