



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



### PROBABILITES

### ENONCE DE L'EXERCICE

#### ENONCE-29

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

- 1) Montrer que l'intégrale converge si et seulement si  $x > 0$ .
- 2) Calculer  $\Gamma(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 3) On suppose  $x > 0$  et on considère l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(x)} e^{-t} t^{x-1} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que  $f_x$  est une densité.

- 4) Dans cette question  $x \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $Y_x$  une variable aléatoire réelle admettant  $f_x$  pour densité (on dit que  $Y_x$  suit la loi  $\gamma(x)$ ) et  $X$  une variable définie sur le même espace et suivant une loi de Poisson de paramètre  $m$ . Montrer que  $P(X < x) = P(Y_x > m)$  (On pourra faire une récurrence sur  $x$ ).