PROBABILITES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE−28

On rappelle que la fonction arctan est une bijection continue dérivable de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Soit X une variable réelle admettant pour densité f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

On dit alors que X suit la loi de Cauchy.

1) On considère la variable Y définie par :

$$\begin{array}{lcll} Y & = & \ln|X| & \text{si } X \neq 0 \\ Y & = & 0 & \text{sinon.} \end{array}$$

a) Déterminer la fonction de répartition, F, de X.

b) Déterminer une densité de Y.

c) Montrer que Y admet une espérance et en donner sa valeur.

2)

a) Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes :

$$A = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx \quad \text{et} \quad B = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx.$$

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0$ et retrouver l'espérance de Y par le théorème du transfert.

Jean MALLET, Michel MITERNIQUE et France MALLET-ZOUTU

CORRIGE DU PROBLEME NUMERO 28

CORRIGE–28 :

QUESTION–1

a)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{\pi(1+t^2)}$$
$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{x} \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{1}{\pi} \lim_{a\to-\infty} (\arctan(x) - \arctan(a))$$

D'après l'énoncé, $\lim\limits_{-\infty} \arctan(a) = -\frac{\pi}{2}$, donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}.}$$

b)

$Y(\Omega) = \mathbb{R}$. Soit donc F la fonction de répartition de X,

G la fonction de répartition de Y et g une densité de Y.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) &= p(Y \le x) = p(\ln|X| \le x)\\ &= p(|X| \le e^x) \quad \textbf{(car } \exp \textbf{ est strictement croissante)}\\ &= p(-e^x \le X \le e^x) \quad \textbf{(car } e^x \ge 0)\\ &= F(e^x) - F(-e^x)\\ &= \frac{1}{\pi}\arctan(e^x) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\pi}\arctan(-e^x) + \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \frac{1}{\pi}\Big(\arctan(e^x) - \arctan(-e^x)\Big).}$$

• La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; la fonction ψ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition les fonctions $x \longmapsto \arctan(e^x)$ et $x \longmapsto \arctan(-e^x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on peut prendre G' pour g, soit

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^x}{1+(e^x)^2} - \frac{-e^x}{1+(-e^x)^2}\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^x}{1+(e^x)^2} + \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{2e^x}{\pi(1+e^{2x})}.}$$

c)

Sous réserve d'existence,

$$E(Y) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ye^y}{e^{2y}+1}dy = \int_{-\infty}^{0} \frac{ye^y}{e^{2y}+1}dy + \int_{0}^{+\infty} \frac{ye^y}{e^{2y}+1}dy.$$

$E(Y)$ existe si et seulement si les deux intégrales convergent.

$$\boxed{\text{Etude de } I = \int_{0}^{+\infty} \frac{ye^y}{e^{2y}+1}dy.}$$

Notons $h(y) = \dfrac{ye^y}{e^{2y}+1}$. La fonction h est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. De plus

$$\frac{ye^y}{e^{2y}+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{ye^y}{e^{2y}} = ye^{-y}. \qquad \textbf{(1)}$$