



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



PROBABILITES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-28

On rappelle que la fonction arctan est une bijection continue dérivable de \mathbb{R} dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Soit X une variable réelle admettant pour densité f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

On dit alors que X suit la loi de Cauchy.

1) On considère la variable Y définie par :

$$\begin{aligned} Y &= \ln |X| & \text{si } X \neq 0 \\ Y &= 0 & \text{sinon.} \end{aligned}$$

- Déterminer la fonction de répartition, F , de X .
- Déterminer une densité de Y .
- Montrer que Y admet une espérance et en donner sa valeur.

2)

a) Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes :

$$A = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx \quad \text{et} \quad B = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

b) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$ et retrouver l'espérance de Y par le théorème du transfert.

CORRIGE DU PROBLEME NUMERO 28

CORRIGE-28 :

QUESTION-1

a)

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, F(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{dt}{\pi(1+t^2)} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^x \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctan(x) - \arctan(a)) \end{aligned}$$

D'après l'énoncé, $\lim_{-\infty} \arctan(a) = -\frac{\pi}{2}$, donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}.}$$

b)

$Y(\Omega) = \mathbb{R}$. Soit donc F la fonction de répartition de X ,

G la fonction de répartition de Y et g une densité de Y .

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, G(x) &= p(Y \leq x) = p(\ln |X| \leq x) \\ &= p(|X| \leq e^x) \quad (\text{car exp est strictement croissante}) \\ &= p(-e^x \leq X \leq e^x) \quad (\text{car } e^x \geq 0) \\ &= F(e^x) - F(-e^x) \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan(e^x) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\pi} \arctan(-e^x) + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan(e^x) - \arctan(-e^x) \right).}$$

• La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ; la fonction ψ est aussi dérivable sur \mathbb{R} , donc par composition les fonctions $x \mapsto \arctan(e^x)$ et $x \mapsto \arctan(-e^x)$ sont dérivables sur \mathbb{R} .

La fonction G est dérivable sur \mathbb{R} et l'on peut prendre G' pour g , soit

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, g(x) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^x}{1+(e^x)^2} - \frac{-e^x}{1+(-e^x)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^x}{1+(e^x)^2} + \frac{e^x}{1+(e^x)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{e^x}{1+e^{2x}} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{2e^x}{\pi(1+e^{2x})}.}$$

c)

Sous réserve d'existence,

$$E(Y) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ye^y}{e^{2y}+1} dy = \int_{-\infty}^0 \frac{ye^y}{e^{2y}+1} dy + \int_0^{+\infty} \frac{ye^y}{e^{2y}+1} dy.$$

$E(Y)$ existe si et seulement si les deux intégrales convergent.

$$\boxed{\text{Etude de } I = \int_0^{+\infty} \frac{ye^y}{e^{2y}+1} dy.}$$

Notons $h(y) = \frac{ye^y}{e^{2y}+1}$. La fonction h est continue et positive sur \mathbb{R}_+ . De plus

$$\frac{ye^y}{e^{2y}+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{ye^y}{e^{2y}} = ye^{-y}. \quad (1)$$